8 FUNTZIOEN LIMITEAK. JARRAITASUNA

221. orrialdea

HAUSNARTU ETA EBATZI

Oinarrizko limite batzuk

■ **Erabili zentzua honako limite hauen balioa emateko:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$, $\lim\limits_{x \to 2} x^3$, $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

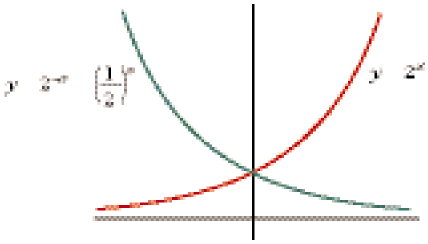
f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$

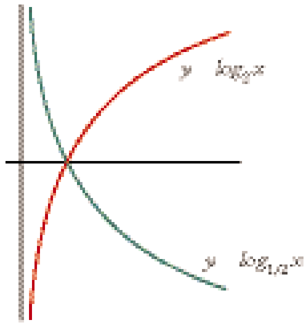
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x + 5} = -\infty$

Esponentzialak eta logaritmikoak

Gogoratu zelakoak diren funtzio esponentzial eta logaritmiko batzuen funtzioak:





■ **Grafiko horiek ikusita, eman balioa honako limite hauetako bakoitzari:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x, \quad \lim\limits_{x \to 0} \log_2 x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x, \quad \lim\limits_{x \to 0} \log_{1/2} x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$ ez dago, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$ ez dago, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x = -\infty$

Kalkulagailuarekin

Kalkulagailuarekin haztamuz jota, eman honako limite hauen balioak:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln (x-3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln (x-3) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \simeq 403{,}43$

222. orrialdea

1. **Ezarri limitea (finitua edo infinitua) honako segida hauei, eta identifikatu limiterik ez dutenak.**

a) $a_n = n^3 - 10n^2$ b) $b_n = 5 - 3n^2$ c) $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ d) $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

e) $e_n = \sin \dfrac{\pi}{4} n$ f) $f_n = 2^n$ g) $g_n = -2^n$ h) $h_n = (-2)^n$

a) $a_n = n^3 - 10n^2$

$(-9, -32, -63, -96, -125, -144, -147, -128, -81, 0, 121, \ldots)$ $a_n \to +\infty$

b) $b_n = 5 - 3n^2$ $(2, -7, -22, -43, -70, -103, -142, -187, -283, \ldots)$ $b_n \to -\infty$

c) $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ $\left(6, \ldots, -8, -\dfrac{9}{2}, -\dfrac{10}{3}, -\dfrac{11}{4}, -\dfrac{12}{5}, -\dfrac{13}{6}, -\dfrac{14}{7}, \ldots\right)$ $c_n \to -1$

d) $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}, \dfrac{36}{7}, \dfrac{49}{8}, \dfrac{64}{9}, \dfrac{81}{10}, \dfrac{100}{11}, \ldots\right)$ $d_n \to +\infty$

e) $e_n = \sin \dfrac{\pi}{4} n$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots\right)$ e_n-k ez du limiterik

f) $f_n = 2^n$ $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots)$ $f_n \to +\infty$

g) $g_n = -2^n$ $(-2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, \ldots)$ $g_n \to -\infty$

h) $h_n = (-2)^n$ $(-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, \ldots)$ h_n-k ez du limiterik

225. orrialdea

1. $u(x) \to 2$ **eta** $v(x) \to -3$ **badira** $x \to +\infty$ **denean, kalkulatu honako hauen limitea** $x \to +\infty$ **denean:**

a) $u(x) + v(x)$

b) $v(x)/u(x)$

c) $5^{u(x)}$

d) $\sqrt{v(x)}$

e) $u(x) \cdot v(x)$

f) $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ ez da existitzen

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. $u(x) \to -1$ **eta** $v(x) \to 0$ **badira** $x \to +\infty$ **denean, kalkulatu honako hauen limitea** $x \to +\infty$ **denean:**

a) $u(x) - v(x)$

b) $v(x) - u(x)$

c) $v(x)/u(x)$

d) $\log_2 v(x)$

e) $u(x) \cdot v(x)$

f) $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty & v(x) \to 0^+ \text{ doanean} \\ \text{ez da existitzen} & v(x) \to 0^- \text{ doanean} \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

226. orrialdea

3. Kalkulatu honako limite hauek:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. **Kalkulatu limite hauek:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x) = -\infty$

227. orrialdea

5. **Esan honako adierazpen hauetako zein diren infinituak $(\pm\infty)$, $x \to +\infty$ denean:**

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $\log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \;\to\;$ Bai

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5^x = 0 \;\to\;$ Ez

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1{,}5^x) = -\infty \;\to\;$ Bai

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \;\to\;$ Bai

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \;\to\;$ Ez

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \;\to\;$ Bai

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \;\to\;$ Bai

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \;\to\;$ Ez

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \;\to\;$ Bai

6. **a) Ordenatu txikienetik handienera honako infinitu hauen ordenak:**

$$\log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$$

b) Aurreko emaitza kontuan hartuta, kalkulatu:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

228. orrialdea

7. $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$ **badira, ezarri honako adierazpen hauei limitea** $x \to +\infty$ **denean (ahal den kasuetan):**

a) $f(x) - h(x)$	b) $f(x)^{f(x)}$	c) $f(x) + h(x)$
d) $f(x)^x$	e) $f(x) \cdot h(x)$	f) $u(x)^{u(x)}$
g) $f(x)/h(x)$	h) $[-h(x)]^{h(x)}$	i) $g(x)^{h(x)}$
j) $u(x)/h(x)$	k) $f(x)/u(x)$	l) $h(x)/u(x)$
m) $g(x)/u(x)$	n) $x + f(x)$	ñ) $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	p) $h(x)^{h(x)}$	q) x^{-x}

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty) \;\to\;$ Indeterminazioa

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \;\to\;$ Indeterminazioa

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \;\to\;$ Indeterminazioa

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminazioa

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \quad \to \quad$ Ez da existitzen

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

229. orrialdea

8. ***f*, *g*, *h* eta *u* funtzioak proposatutako 7. ariketakoak dira (aurreko orrialdean). Esan honako eragiketa hauetako zein diren indeterminatuak. Indeterminazioak diren kasuetan, esan zer motatakoak diren, eta ez direnetan, esan limitea zein den:**

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$

c) $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$

g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty)$. Indeterminazioa.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)}$. Indeterminazioa.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)}$. Indeterminazioa.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminazioa.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

231. orrialdea

1. **Eragiketarik egin gabe, adierazi honako adierazpen hauen limitea zein den $x \to +\infty$ denean:**

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1})$ **b)** $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ **d)** $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

2. Kalkulatu honako adierazpen hauen limitea, $x \to +\infty$ denean:

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}$

d) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$ **e)** $2x - \sqrt{x^2 + x}$ **f)** $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3 + 5)(x - 2) - (4x^3 - x)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2 + 1)}{2(2x^2 + 1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x - \sqrt{x^2 + x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2 + x}\right)}{2x + \sqrt{x^2 + x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2 + x}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 2}\right)\left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2}\right)}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1 - x - 2}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2}} = 0$

232. orrialdea

3. **Kalkulatu honako limite hauek, $x \to +\infty$ denean:**

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{x}$ **b)** $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5}$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x}$ **e)** $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ **f)** $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5} = 1^{5} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^{5} = e^{5}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

4. **Kalkulatu honako limite hauek, $x \to +\infty$ denean:**

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5}$ **e)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ **f)** $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5} = 1^{5} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^{2} = e^{2}$

233. orrialdea

5. **Ebatzi, aurreko erregela hori erabiliz:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

a) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+5}{3x-1} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x-3) = +\infty$ direnez, l $(1)^{(+\infty)}$ motakoa da.

Erregela aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} - 1\right) \cdot (5x-3)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6}{3x-1}\right) \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

b) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-4) = +\infty$ direnez, l $(1)^{(+\infty)}$ motakoa da.

Erregela aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+2} - 1\right) \cdot (2x-4)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2}\right) \cdot (2x-4)} = e^{-2}$$

235. orrialdea

1. **Eragiketarik egin gabe, esan zein den honako adierazpen hauen limitea $x \to -\infty$ denean:**

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$ **b)** $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$ **d)** $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$ **f)** $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$ **h)** $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$ **j)** $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^5 - 1} - 5^x\right)$ ez da existitzen

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^5 - \sqrt{x^4 - 1}\right) = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x + 2} - x^2\right) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2. **Kalkulatu honako adierazpen hauen limitea, $x \to -\infty$ denean:**

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $2x + \sqrt{x^2 + x}$

e) $\sqrt{x^2 + 2x} + x$

f) $\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3}$

h) $\left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-x^3}{2x^2 + 1} + \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2}\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{-1}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right)\left(-2x - \sqrt{x^2 - x}\right)}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \dfrac{-2}{1 + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-5x + 3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x - 1} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1\right) \cdot (-3x - 1)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x - 3}{-x^2 + 2} \cdot (-3x - 1)\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3$

238. orrialdea

1. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ **eta** $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ **badira, esan zein den limitearen balioa** x**-k 1era jotzen duenean honako funtzio hauetan:**

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) + g(x)\right) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(4f(x) - 5g(x)\right) = 12 - 10 = 2$

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ **eta** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ **badira orduan** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$**.**

Enuntziatu funtzioekin egindako eragiketen limiteen gainerako propietateak, idazkera egokia erabiliz.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ eta $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ badira, orduan:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ ($m \neq 0$ bada).

5) $f(x) > 0$ bada, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) n bakoitia bada edo n bikoitia eta $f(x) \geq 0 \;\to\; \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) $\alpha > 0$ eta $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

3. $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ **eta** $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$**, badira,** $\lim\limits_{x \to 2}$ **esan honako funtzio hauen balioak, posible den kasuetan:**

[Gogoan izan $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ adierazpenak indeterminazioak direla].

a) $2p(x) + q(x)$	**b)** $p(x) - 3q(x)$	**c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$	**d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$
e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$	**f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$	**g)** $s(x) \cdot p(x)$	**h)** $s(x)^{s(x)}$
i) $p(x)^{r(x)}$	**j)** $r(x)^{s(x)}$	**k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$	**l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$
m) $r(x)^{p(x)}$	**n)** $r(x)^{-q(x)}$	**ñ)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$	**o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = (+\infty) - (+\infty)$. Indeterminazioa.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$. Indeterminazioa.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = (0) \cdot (+\infty)$. Indeterminazioa.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{s(x)} = (0)^{(0)}$. Indeterminazioa.

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3-3}{(0)} = \dfrac{(0)}{(0)}$. Indeterminazioa.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminazioa.

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = (1)^{(-\infty)}$. Indeterminazioa.

239. orrialdea

4. Kalkulatu honako limiteak:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

5. **Kalkulatu honako limiteak:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$

a) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}} = \lim_{x \to -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3\,(x+3)^3}{x^4(x+3)^2}} = \lim_{x \to -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3\,(x+3)}{x^4}} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2\,(x-1)^2}} = \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x+1)}{(x+2)^2\,(x-1)}} \to$

$\to \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) \text{ ez da existitzen} \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

240. orrialdea

6. **Kalkulatu:** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \frac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \frac{x^3+2x+1}{x^3+x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x\,(x+2)} - \frac{x^3+2x+1}{x\,(x^2+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)(x^2-5x+2)-(x+2)(x^3+2x+1)}{x\,(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4-5x^3+2x^2+x^2-5x+2-x^4-2x^2-x-2x^3-4x-2}{x\,(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3+x^2-10x}{x\,(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,(-7x^2+x-10)}{x\,(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2+x-10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

7. **Kalkulatu:** $\displaystyle\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2-7x+4}{x-3}\right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2-7x+4}{x-3}\right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim_{x \to 7}\left[\left(\frac{x^2-7x+4}{x-3}-1\right)\cdot\frac{x+1}{x-7}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 7}\left(\frac{x^2-8x+7}{x-3}\cdot\frac{x+1}{x-7}\right)} = e^{\lim_{x \to 7}\frac{(x-7)\,(x-1)\,(x+1)}{(x-3)\,(x-7)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 7}\frac{(x-1)\,(x+1)}{(x-3)}} = e^{12}$$

243. orrialdea

1. Aurkitu honako ekuazio horrek erroak izango dituen lau tarte desberdin:

$$\mathbf{2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0}$$

Bilatu –4 eta 3 arteko tarteak. Egiaztatu $f(1,5) < 0$ dela, eta kontuan hartu.

Har dezagun $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ funtzioa.

$f(x)$ jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan, eta gainera:

$$\left.\begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array}\right\} \text{Orduan, erro erreak bat daukagu } (-4, -3) \text{ tartean.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{Erro erreal bat dago } (0, 1) \text{ tartean.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1,5) = -1,375 < 0 \end{array}\right\} \text{Erro erreal bat dago } (1;\ 1,5) \text{ tartean.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,5) = -1,375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array}\right\} \text{Erro erreal bat dago } (1,5;\ 2) \text{ tartean.}$$

2. Egiaztatu $e^x + e^{-x} - 1$ eta $e^x - e^{-x}$ funtzioek elkar ebakitzen dutela punturen batean.

Har dezagun funtzioen kendura:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ jarraitua da. Gainera:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0,26 < 0 \end{array}\right\} F(0)\textit{-ren zeinua} \neq F(1)\textit{-ren zeinua.}$$

Orduan, Bolzanoren teoremari esker badakigu $c \in (0,1)$ badagoela $F(c) = 0$ beteko duena; hau da, badago $c \in (0, 1)$ puntu bat zeinetan bi funtzioek elkar ebakitzen duten.

3. Justifikatu honako funtzioetako zeinek dituen maximo eta minimo absolutu bat zehazten den tarte horretan:

a) $x^2 - 1$, $[-1, 1]$ tartean

b) x^2, $[-3, 4]$ tartean

c) $1/(x - 1)$, $[2, 5]$ tartean

d) $1/(x - 1)$, $[0, 2]$ tartean

e) $1/(1 + x^2)$, $[-5, 10]$ tartean

a) $f(x) = x^2 - 1$ jarraitua da $[-1, 1]$ tartean. Orduan, Weierstrass-en teoremari esker, ziurta dezakegu maximo eta minimo absolutuak dituela tarte horretan.

b) $f(x) = x^2$ jarraitua da $[-3, 4]$ tartean. Orduan, maximo eta minimo absolutuak ditu tarte horretan.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ jarraitua da $[2, 5]$ tartean. Orduan, maximo eta minimo absolutuak ditu tarte horretan.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ez da jarraitua $[0, 2]$ tartean, etena baitauka $x = 1$-ean. Orduan, ezin dugu baieztatu maximo edota minimo absolutirik izango duen ala ez tarte horretan.

Honako limite hauek ez daukala dioskue:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ jarraitua da $[-5, 10]$ tartean. Orduan, maximo eta minimo absolutuak ditu tarte horretan.

249. orrialdea

PROPOSATUTAKO ARIKETAK ETA PROBLEMAK

TREBATZEKO

Limiteak $x \to \pm\infty$ denean

1 **$\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ eta $\lim c_n = 3$ direla jakinda, esan honako kasuetako zeinetan dagoen indeterminazioa.**

Indeterminaziorik ez dagoen kasuetan, esan limitea zein den:

a) $a_n + b_n$ **b)** $b_n + c_n$ **c)** $\dfrac{a_n}{c_n}$ **d)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $(c_n)^{b_n}$ **f)** $(3 - c_n) \cdot a_n$ **g)** $\dfrac{b_n}{3 - c_n}$ **h)** $\left(\dfrac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

a) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty + (-\infty) = (+\infty) - (+\infty) \to$ Indeterminazioa.

b) $\lim (b_n + c_n) = \lim b_n + \lim c_n = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \to$ Indeterminazioa.

e) $\lim [c_n]^{b_n} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim [3 - c_n] \cdot a_n = (0) \cdot (+\infty) \to$ Indeterminazioa.

g) $\lim \dfrac{b_n}{3 - c_n} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

h) $\lim \left[\dfrac{3}{c_n}\right]^{b_n} = (1)^{(-\infty)} \to$ Indeterminazioa.

2 **Kalkulatu honako funtzio hauen limiteak $x \to -\infty$ denean:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x - 3}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 **Kalkulatu honako segida hauen limiteak:**

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1}$ **b)** $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}}$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3}$ **d)** $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}}$

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1} = \lim \dfrac{\sqrt{3}\, n}{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}} = +\infty$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3} = 0$ d) $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}} = 0$

4 **Kalkulatu limite hauek:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

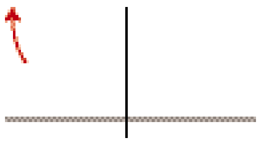
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

5 **Kalkulatu honako limiteak eta adierazi lortutako emaitzak grafiko batean:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x + 1}$

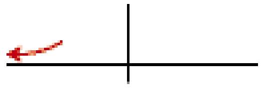
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

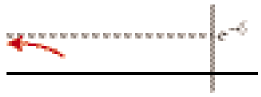
$2^{x+1} > 0$ denez, edozein x-rentzako.



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} > \dfrac{1}{e}$ egiaztatzen dugu x-ri balioaren bat emanez, adibidez, $x = -10$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$



$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1 + 3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2-6x}{x}\right)} = e^{-6} = \frac{1}{e^{6}}$$

$\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} < e^{-6}$ egiaztatzen dugu x-ri balioaren bat emanez, adibidez, $x = -10$.

6 **Aurkitu:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminazioa).

$\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)$ adierazpenaz bidertuz eta zatituz ebatziko dugu.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminazioa).

$\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$ adierazpenaz bidertuz eta zatituz ebatziko dugu.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

7 **Kalkulatu honako funtzio hauen limitea $x \to +\infty$ denean:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

8 **Kalkulatu honako limite hauek:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}\right)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

9 **Kalkulatu honako limite hauek:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

a) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1\right) \cdot x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2$$

b) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} - 1\right) \cdot (2x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6$$

c) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+3} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} - 1\right) \cdot (x+2)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}$$

d) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-4}{3x-2} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{3} = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2} - 1\right) \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{3x-2} \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x-2}{9x-6}} = e^{-2/9}$$

e) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 2) = -\infty$ direnez, $\dfrac{1}{(1)^{(+\infty)}}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

f) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-3}{x+2} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} - 1\right) \cdot (x^2-5)} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5(x^2-5)}{x+2}} = +\infty$$

10 **Aurkitu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ eta $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ honako kasu hauetan:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \text{ bada} \\ 1 - \ln x & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x} & x \neq 0 \text{ bada} \\ 3 & x = 0 \text{ bada} \end{cases}$

a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

b) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = +\infty$

250. orrialdea

Limiteak puntu batean

11 **Honako hau jakinda:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

esan honako limite hauen balioa, eman daitekeen kasuetan:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = (0) \cdot (-\infty)$ $\rightarrow$ Indeterminazioa.

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

12 **Kalkulatu:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}.$

Alboko limiteak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty.$ Ez da existitzen.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{0}$

Alboko limiteak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

$\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} \right] = +\infty.$

13 **Kalkulatu honako limite hauek:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{1 - x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminazioa.

Zenbakitzailea eta izendatzailea $x - 1$ binomioaz zatituz:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-6)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \to 1} (6 - x) = 5$$

(*) Ruffini-ren erregela aplikatuz:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{1 - x^2} = \dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminazioa.

Zatikia sinplifikatuz:

$$\frac{(x-1)^3}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{-(x-1)(1+x)} = \frac{(x-1)^2}{-(1+x)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{-(1+x)} = \frac{0}{-2} = 0$$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminazioa.

Zenbakitzailea eta izendatzailea $x + 1$ binomioaz zatituz:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2} = 0$$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

14 **Kalkulatu:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right]$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} \right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{(x - 2)(x - 3)} - \dfrac{4}{(x - 2)} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - 4(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - 4x + 12}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = \dfrac{7}{(0)}$

Alboko limiteak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\left(1 - \sqrt{3 - x}\right)\left(1 + \sqrt{3 - x}\right)}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - (3 - x)}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 3 + x}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1 + \sqrt{3 - x}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x + 9} - 3\right)\left(\sqrt{x + 9} + 3\right)}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \dfrac{1}{(0)}$

Alboko limiteak kalkulatuko ditugu:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}\right)\left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x) - (1 - x)}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - 1 + x}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \dfrac{2}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{3}$

15 **Kalkulatu:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{2x+1} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-2x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-2x}{2x^2+x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x(2x+1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-2}{2x+1}} = e^{-2}$$

b) Izan bedi $l = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-x-1}{7-x} = 1$ eta $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ direnez, $(1)^{(+\infty)}$ motako limitea da.

Formula aplikatuz:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2x^2-x-1}{7-x} - 1\right) \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{7-x} \cdot \frac{1}{x-2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x+4}{7-x}} = e^{8/5}$$

Jarraitasuna

16 **Esan funtzio hauek jarraituak diren $x = 2$ puntuan:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x < 2 \text{ bada} \\ 6-x & x \ge 2 \text{ bada} \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \le 2 \text{ bada} \\ 2x+1 & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6-2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ jarraitua da $x = 2$-an, zeren: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ baita.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ ez da jarraitua $x = 2$, puntuan, ez delako existitzen $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

s17 **Aztertu funtzio hauen jarraitasuna:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \text{ bada} \\ \ln x & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/x & x < 1 \text{ bada} \\ 2x - 1 & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$

a) • $x \neq 1$ bada $\rightarrow$ $f(x)$ es jarraitua da, e^x eta $\ln x$ jarraituak baitira $x < 1$ eta $x \geq 1$, direnean, hurrenez hurren.

• $x = 1$ bada: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\ln x) = 0$

Ez da jarraitua $x = 1$-ean, ez baita existitzen $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) Funtzioaren definizio eremua $D = \mathbb{R} - \{0\}$ da.

- Baldin $x \neq 0$ eta $x \neq 1$ bada $\rightarrow$ Funtzioa jarraitua da.
- $x = 0$ bada: Ez da jarraitua, $f(x)$ ze baitago definituta $x = 0$ denean.

  Gainera, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ eta $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

  Asintota bertikala daukagu $x = 0$-an.

- $x = 1$ bada:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\[2ex] f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$$

$f(x)$ jarraitua da $x = 1$ puntuan, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ betetzen baita.

18 **Aurkitu** $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ **funtzioaren etenpuntuak, eta esan horietakoren batean etena saihesgarria den.**

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3) - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x - 6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

Izendatzailearen erroak (izendatzailea zero egiten duten balioak) bilatzen ditugu:

$$(x-3)(x+3) = 0 \;\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Funtzioa etena da $x = 3$ eta $x = -3$ puntuetan, ez baitago definituta puntu horietan.

- $x = -3$-an: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2}{x+3} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Asintota bertikala daukagu $x = -3$-an; etengunea, beraz, ez da saihesgarria.

- $x = 3$-an: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

  Beraz, $x = 3$-an etengune saihesgarria daukagu, funtzioak limitea baitauka puntu horretan.

EBATZEKO

19 **a) Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren limitea $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ denean:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

b) Adierazi emaitzak grafiko batean.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

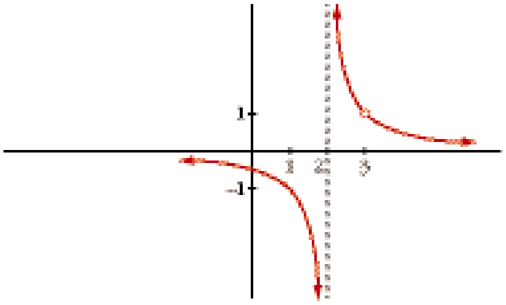
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(0)}$$

Alboko limiteak kalkulatuz: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b)



s20 **Kalkulatu zein izan behar duen k-ren balioak, honako funtzio hauek jarraituak izan daitezen:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \le 2 \text{ bada} \\ k - x & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + k & x \le 0 \text{ bada} \\ x^2 - 1 & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & x \le 0 \text{ bada} \\ x + 2k & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$

a) • Baldin $x \ne 2$, funtzioa jarraitua da.

• $x = 2$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Jarraitua izateko:} \\ k - 2 = 3 \to k = 5 \end{array}$$

b) • $x \ne 0$ bada, funtzioa jarraitua da.

• $x = 0$ bada:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Jarraitua izateko:} \\ k = -1 \end{array}$$

c) • $x \ne 0$ bada, funtzioa jarraitua da.

• $x = 0$ bada:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{kx} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + 2k = 2k \\ f(0) = e^{k \cdot 0} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Jarraitua izateko:} \\ 1 = 2k \to k = 1/2 \end{array}$$

251. orrialdea

s21 **Kalkulatu zein izan behar duen k-ren balioak, honako funtzio hauetako bakoitza jarraitua izan dadin:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & x \ne 1 \text{ bada} \\ k & x = 1 \text{ bada} \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & x \ne 1 \text{ bada} \\ k & x = 1 \text{ bada} \end{cases}$

a) • $x \neq 1$ baldin bada, funtzioa jarraitua da, $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ jarraitua baita.

$x = 1$-ean jarraitua izan dadin, hauxe gertatu behar da: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Kalkula dezagun $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

(*) Indeterminazioa $\dfrac{(0)}{(0)}$ motakoa da. Zatikia sinplifikatzen dugu.

$x = 1$-ean jarraitua izateko, $k = 4$ izan behar da. Balio horretarako da f funtzioa jarraitua $\mathbb{R}$-n.

b) • $x \geq 0$ eta $x \neq 1$ baldin badira, funtzioa jarraitua da, $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ jarraitua baita.

Funtzioa jarraitua izan dadin $x = 1$-ean, honako hau bete behar da:

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ kalkulatzen dugu.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \quad \text{(Indeterminazioa).}$$

$\left(\sqrt{x} + 1\right)$ adierazpenaz bidertuz eta zatituz ebatziko dugu:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{(x - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

$x = 1$-ean jarraitua izateko, $k = \dfrac{1}{2}$ izan behar da eta, balio horretarako da f jarraitua $[0, +\infty)$ multzoan.

22 **Aztertu honako funtzio honen jarraitasuna:** $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & x < -1 \text{ bada} \\ x^2 & -1 \leq x < 1 \text{ bada} \\ 2x + 1 & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$

• $x \neq -1$ eta $x \neq 1$ $\rightarrow$ funtzioa jarraitua da.

• $x = -1$ bada:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{Jarraitua da } x = -1\text{-ean.}$$

• $x = 1$ bada $\rightarrow$ Ez da jarraitua, $x = 1$-ean ez dago eta definituta; ez da existitzen $f(1)$.

Gainera:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3\end{array}\right\} \text{Etena jauzi finitukoa da.}$$

23 **Dendari batek produktu jakin bat saltzen du. Produktuaren unitate bakoitzeko 5 € kobratzen ditu. Baina 10 unitatetik gorako eskaria eginez gero, unitate bakoitzaren prezioa merkatu egiten du, eta x unitateko hau kobratzen du:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & 0 < x \le 10 \text{ bada} \\ \sqrt{ax^2 + 500} & x > 10 \text{ bada} \end{cases}$$

a) Kalkulatu zein izan behar duen *a*-ren balioak, erosten diren unitate kopurua aldatzean, prezioa modu jarraituan aldatu dadin.

b) Zertara jotzen du unitate baten prezioak unitate "asko eta asko" erosten direnean?

☛ ***Unitate baten prezioa C(x)/x da.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Jarraitua izateko:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2\,500 \rightarrow 100a = 2\,000 \rightarrow a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

s24 **Unibertsitateko Biologia laborategian, bakterio jakin baten aleen *T* tamaina (mikratan neurtuta) *t* denborarekin aldatzen dela zehaztu dute, lege honen arabera:**

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & t < 8 \text{ ordu bada} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & t > 8 \text{ ordu bada} \end{cases}$$

a **parametroa aldagai biologiko bat da, eta horren interpretazioak zoratuta dauzka zientzialariak. Baina uste dute badagoela hazkundea *t* = 8 kasuan jarraitua egiten duen balio bat.**

a) Eman erantzunen bat.

b) Ikertu zer tamaina hartuko duen bakterio batek mugagabe izanez gero haztegian.

a) Jarraitua izateko $t = 8$-an, funtzioak berdintza hau bete behar du: $\lim_{t \to 8} T(t) = T(8)$

Limitea kalkulatuz:

$$\lim_{t \to 8^-} T(t) = \lim_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{\left(\sqrt{3t - 15} - 3\right)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15} + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$T(t)$ jarraitua izateko, honako hau gertatu beharko litzateke:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 + a = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-31}{4}$$

Baina $a = \frac{-31}{4}$ denerako, $T(t) = \sqrt{t + \frac{-31}{4}}$ izango litzateke $t < 8$ denean.

Eta, orduan, $T(t)$ ez litzateke existituko $t \leq \frac{31}{4} = 7{,}75$ ordu denean.

Beraz, ez dago a-ren baliorik, hazkundea jarraitu egingo duenik.

b) $\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ mikra

25 $\boldsymbol{f(x) = \frac{|x|}{x + 1}}$ **izanik, justifikatu** $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1}$ **eta** $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1}$ **direla.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x + 1} & x \leq 0 \text{ bada} \\ \dfrac{x}{x + 1} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

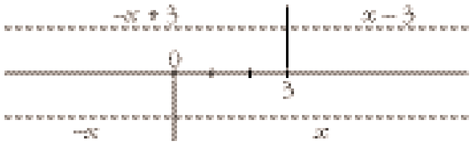
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

26 **Kalkulatu honako funtzio hauen limitea $x \to +\infty$ denean eta $x \to -\infty$ denean, eta definitu aldez aurretik tarteen bitartez:**

a) $\boldsymbol{f(x) = |x-3| - |x|}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = |2x-1| + x}$ **c)** $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}}$

a) Tarteka definitzen dugu f:

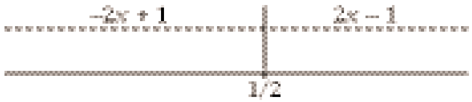


- $x < 0$: $|x-3| - |x| = -(x-3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$
- $0 \le x \le 3$: $|x-3| - |x| = -(x-3) - x = -2x + 3$
- $x > 3$: $|x-3| - |x| = (x-3) - x = -3$

$$\text{Beraz, } f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 0 \text{ bada} \\ -2x + 3 & 0 < x \le 3 \text{ bada} \\ -3 & x > 3 \text{ bada} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b)



- $x \le \dfrac{1}{2}$: $|2x-1| + x = -(2x-1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$
- $x > \dfrac{1}{2}$: $|2x-1| + x = (2x-1) + x = 3x - 1$

$$\text{Beraz, } f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \le \dfrac{1}{2} \text{ bada} \\ 3x - 1 & x > \dfrac{1}{2} \text{ bada} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x + 1) = \lim_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$$

c) • $x < 0$ baldin bada, $\dfrac{x+1}{|x|} = \dfrac{x+1}{-x}$

- $x > 0$ baldin bada, $\dfrac{x+1}{|x|} = \dfrac{x+1}{x}$

f ez dago $x = 0$-an definituta; beraz, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & x < 0 \text{ bada} \\ \dfrac{x+1}{x} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{x} = -1$$

27 **Aztertu honako funtzio honek $x = 0$ kasuan duen jarraitasuna:**

$$y = 2x + \frac{|x|}{x}$$

Zer eten mota du?

$x = 0$-an, funtzioa ez dago definituta, orduan ez da jarraitua, etena da.

$y = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \text{ bada} \\ 2x + 1 & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$, orduan:

$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$; $\lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Beraz, jauzi finituko etena du $x = 0$ puntuan.

s28 ***f* funtzioa honela definituta dago:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & x > 1 \text{ bada} \\ 2x^2 + ax + b & x \le 1 \text{ bada} \end{cases}$$

Aurkitu zer balio izan behar duten a-k eta b-k funtzioa jarraitua izan dadin eta horren grafikoa koordenatuen jatorritik igaro dadin.

- $f(x)$-ren grafikoa koordenatuen jatorritik igaro dadin $f(0) = 0$ izan behar da, hau da: $f(0) = b = 0$
- Funtzioa jarraitua izateko ($x \ne 1$ bada, jarraitua da), honako hau gertatu behar da:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ &f(1) = 2 + a \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Berdinduz:} \\ &2 + a = -1 \;\rightarrow\; a = -3 \end{aligned}$$

Beraz, $a = -3$ eta $b = 0$ direnean funtzioa jarraitua da, eta beraren grafikoa koordenatuen jatorritik igarotzen da.

GALDERA TEORIKOAK

29 **Funtzio bat $x = 3$ puntuan definituta ez badago, gerta daiteke $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ izatea? Izan daiteke jarraitua funtzioa $x = 3$ puntuan?**

Bai, gerta daiteke $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, adibidez:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ funtzioan $\lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; eta $f(x)$ ez dago definituta $x = 3$-an.

Alta, $f(x)$ ezin da jarraitua izan $x = 3$-an ($f(3)$ ez da existitzen eta).

30 **f, funtzio jarraitu bati buruz, badakigu $f(x) < 0$ dela, baldin eta $x < 2$ bada; eta $f(x) > 0$ dela, $x > 2$ bada. Jakin dezakegu $\lim_{x \to 2} f(x)$-ren balioa?**

$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

s31 **$f(x) = x^2 + 1$ funtzioa daukagu.**

Ziurta dezakegu funtzio horrek [1, 5] tarteko balio guztiak hartzen dituela? Baietz bada, enuntziatu hori justifikatuko duen teorema.

$f(x)$ jarraitua da [0, 2] tartean eta $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Tarteko balioen teorema aplikatuz, badakigu funtzio horrek $f(0) = 1$ eta $f(2) = 5$-en arteko balio guztiak hartuko dituela; beraz, [1,5] tarteko balio guztiak.

s32 **Eman Bolzanoren teoremari buruzko interpretazio geometriko bat, eta erabili $f(x) = x^3 + x^2$ eta $g(x) = 3 + \cos x$ funtzioen grafikoek punturen batean elkar ebakitzen dutela frogatzeko.**

☛ ***Begiratu 11. ariketa ebatziari.***

- Interpretazio geometrikoa: $f(x)$ funtzioa jarraitua bada tarte itxi batean,eta tartearen muturretan zeinuz desberdinak diren balioak hartzen baditu, funtzioak *OX* ardatza ebaki egingo du tarte horretan.
- $f(x) = x^3 + x^2$ eta $g(x) = 3 + \cos x$, funtzioak eman dizkigute eta bien arteko kendura eraikiko dugu: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

  $f(x)$ eta $g(x)$ jarraituak direnez, $f(x) - g(x)$ funtzioa ere jarraitua izango da.

  Gainera: $\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 \;\to\; f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9{,}42 \;\to\; f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$

  Orduan, badago $c \in (0, 2)$ hau beteko duena: $f(c) - g(c) = 0$ (Bolzanoren teorema aplikatuz) hau da, $f(c) = g(c)$.

252. orrialdea

s33 **Funtzio hau dugu:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}}$$

Berdintzako bigarren atalak ez du zentzurik $x = 2$ denean. Nola aukeratu $f(2)$-ren balioa f funtzioa jarraitua izan dadin puntu horretan?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

f jarraitua izan dadin $x = 2$ puntuan, $f(2) = 4$ egin behar dugu.

34 **g funtzio bati buruz badakigu jarraitua dela [0, 1] tarte itxian, eta $0 < x \le 1$ denean, hau dela $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$. Zenbat balio du $g(0)$-k?**

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x + 1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$

Beraz, $g(0) = 1$.

s35 **Funtzio hau emanda:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}}$$

f funtzioa [0, 1] tartean definituta dagoela ikusten dugu, bai eta $f(0) = -1 < 0$ eta $f(1) = e^{-1} > 0$ egiaztatzen dituela, baina ez dela existitzen $f(c) = 0$ beteko duen $c \in (0, 1)$ bat bera ere. Kontra egiten dio Bolzanoren teoremari? Arrazoitu erantzuna.

Bolzano-ren teoremaren arabera, f funtzioa jarraitua bada $[a, b]$ tartean eta $f(a)$-*ren zeinua* $\neq f(b)$)-*ren zeinua* bada, badago $c \in (a, b)$-ren bat, $f(c) = 0$ beteko duena.

Ikus dezagun hipotesiak betetzen diren ala ez. Jarraitasuna aztertuko dugu $x = \frac{1}{2}$-ean.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to (1/2)^-} f(x) &= \lim_{x \to (1/2)^-} \frac{x - 4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \lim_{x \to (1/2)^+} f(x) &= \lim_{x \to (1/2)^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{aligned}\right\}$$

$\lim_{x \to (1/2)^-} f(x) \neq \lim_{x \to (1/2)^+} f(x)$ denez, ez da existitzen $\lim_{x \to 1/2} f(x)$.

$f(x)$ ez da jarraitua $x = \frac{1}{2}$-an.

Beraz, $f(x)$ ez da jarraitua [0,1] tartean; hortaz, ez ditu betetzen Bolzano-ren teoremaren hipotesiak tarte horretan.

s36 **Badakigu $f(x)$ jarraitua dela $[a, b]$ tartean, eta $f(a) = 3$ eta $f(b) = 5$ dire-la. Ziurta dezakegu badagoela $f(c) = 7$ betetzen duen $[a, b]$ tarteko c-ren bat? Arrazoitu erantzunak, eta eman adibideak.**

Ezin dugu ziurtatu. Adibidez:

$f(x) = x + 3$ funtzioak $f(0) = 3$ eta $f(2) = 5$ betetzen ditu. Baina, ez dago $c \in [0, 2]$ punturik $f(c) = 7$, beteko duenik, $f(c) = c + 3 = 7$ izateko $\rightarrow$ $c = 4$ delako $\rightarrow$ $c \notin [0, 2]$

s37 **Aurkitu, arrazoituz, definizio-eremuko x_0 puntu batean jarraituak ez diren bi puntu, kontuan hartuta, gainera, batura funtzioa jarraitua dela puntu horretan.**

Adibidez:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \neq 2 \text{ bada} \\ 2 & x = 2 \text{ bada} \end{cases} \quad \text{ez da jarraitua en } x = 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 2 \text{ bada} \\ 4 & x = 2 \text{ bada} \end{cases} \quad \text{ez da jarraitua } x = 2;$$

baina batura funtzioa, $f(x) + g(x) = 3x$, jarraitua da $x = 2$-an.

s38 **Honako ekuazio honek badu erro errealik?:**

$$\boldsymbol{sin\ x + 2x + 1 = 0}$$

Erantzuna baietz bada, zehaztu erro hori barnean hartuko duen 2 baino anplitude txikiagoko tarte bat.

Har dezagun $f(x) = sin\ x + 2x + 1$ funtzioa.

$f(x)$ jarraitua da $[-1, 0]$ tartean.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) \approx 1{,}84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array} \right\} \ f(1)\textit{-ren zeinua} \neq f(0)\textit{-ren zeinua}$$

Bolzanoren teoremari esker, badago $c \in (-1, 0)$ puntua $f(c) = 0$ beteko duena; hots, $sin\ x + 2x + 1 = 0$ ekuazioak erro erreal bat dauka 2 baino zabalera gutxiagoko $(-1, 0)$ tartean.

s39 **Egiaztatu $x^5 + x + 1 = 0$ ekuazioak, gutxienez, soluzio erreal bat duela.**

Har dezagun $f(x) = x^5 + x + 1$ funtzioa.

$f(x)$ jarraitua da $[-1, 0]$ tartean.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array} \right\} \ f(-1)\textit{-ren zeinua} \neq f(0)\textit{-ren zeinua}$$

Bolzanoren teoremari esker ziurta dezakegu, badagoela $c \in (-1, 0)$ puntu bat $f(c) = 0$ beteko duena; hau da, $x^5 + x + 1 = 0$ ekuazioak erro erreal bat badauka behintzat $(-1, 0)$ tartean.

s40 **Ziurra da 3. mailako ekuazio polinomiko batek erro errealen bat duela. Egiaztatu horrela dela, eta esan 4. mailakoekin gauza bera gertatzen den.**

- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomioa 3. mailakoa bada, honako hau daukagu:

  — $a > 0$ baldin bada, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, eta $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  — $a < 0$ baldin bada, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, orduan $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

  f funtzioa $+\infty$-tik $-\infty$-ra igarotzen bada edo alderantziz, beti aurkitu ahal izango dugu k-ren bat $f(-k)$*-ren zeinua* $\neq$ $f(-k)$*-ren zeinua* beteko duena.

  Baina, gainera, $f(x)$ jarraitua da. Orduan, Bolzano-ren teoremari esker dakigu $f(x)$ funtzioak c erro bat duela $(-k, k)$ tartean. Eta erro hori da $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ekuazioaren soluzioa.

- $f(x)$ 4. mailako polinomioa balitz, ez litzateke gauza bera gertatuko.

  Adibidez, $x^4 + 1 = 0$ ekuazioak ez du erro errealik, $x^4 + 1 > 0$ baita x-ren edozein baliotarako.

s41 **Polinomio baten gai independentea x-n –5 da, eta polinomioak $x = 3$ denean hartzen duen balioa, 7. Arrazoitu (0, 3) tartean badagoela polinomioak –2 balioa hartzen duen punturen bat.**

$f(x)$ polinomioa bada, funtzio jarraitua da, eta gai askea –5 bada, $f(0) = -5$ daukagu. Gainera $f(3) = 7$ dela badakigu. Orduan, tarteko balioen teorema aplikatuz: $-5 < -2 < 7$ denez, ziurta dezakegu badagoela puntu bat (0,3) tartean $c \in (0, 3)$ honakoa beteko duena $f(c) = -2$.

s42 **$y = tg\ x$ funtzioak zeinu desberdineko balioak hartzen ditu $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ tartearen muturretan, eta, hala ere, ez da bertan anulatzen. Bolzanoren teoremari kontra egiten dio horrek?**

$y = tg\ x$ funtzioa ez da jarraitua $x = \frac{\pi}{2}$ puntuan, eta puntu hori $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ tartean dago. Hortaz, ezin diogu Bolazanoren teorema aplikatu tarte horretan.

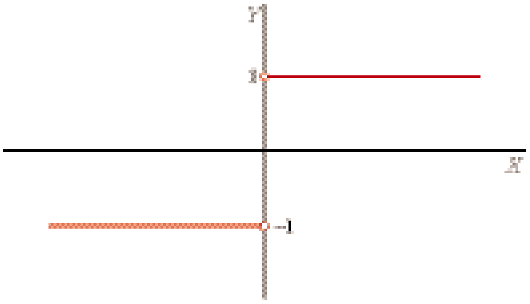
s43 **$f(x) = \frac{x}{|x|}$ funtzioa daukagu. Zehaztu horren definizio-eremua. Marraztu grafikoa, eta arrazoitu $f(0)$-ri balioren bat ezar dakiokeen funtzioa jarraitua izan dadin $\mathbb{R}$ osoan.**

Tarteka definitzen dugu f:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \text{ bada} \\ 1 & x > 0 \text{ bada} \end{cases} \quad \text{Definizio eremua} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ denez, ezin diogu esleitu ezelango baliorik $f(0)$-ri funtzioa $\mathbb{R}$ osoan jarraitua egingo duenik ($x = 0$-an ezin baita jarraitua izan). Jauzi finituko etena du $x = 0$-an.

Grafikoa:



s44 **$x \to a$ denean, $f(x)$ funtzio baten limitea existitzen bada, eta $f(x)$ positiboa bada $x < a$ denean, ziurta dezakegu limite hori positiboa dela? Eta negatiboa ez dela? Justifikatu erantzunak, arrazoiak emanez.**

$f(x) > 0$ bada $x < a$ denean, eta existitzen bada $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, orduan $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ izango da.

Beraz, limitea ez dela negatiboa ziurta dezakegu (positiboa edo zero izan daiteke).

s45 **a) Egiaztatu $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x + 1) - ln(x)] = 0$ dela.**

b) Kalkulatu $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x + 1) - ln(x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln\,(x + 1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = ln\ 1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln\,(x + 1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\,ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right] =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = ln\ e = 1$$

s46 **$f(x)$ eta $g(x)$ bi funtziori buruz badakigu jarraituak direla $[a, b]$ tartean, $f(a) > g(a)$ dela, eta $f(b) < g(b)$ dela.**

Egiaztatu dezakezu existitzen dela bi funtzioen grafikoek elkar ebakiko duten tarte horretako c punturik?

Har dezagun $f(x) - g(x)$ funtzioa.

- $f(x)$ eta $g(x)$ jarraituak direnez $[a, b]$ tartean, orduan $f(x) - g(x)$ ere jarraitua da $[a, b]$ tartean.
- $f(a) > g(a)$ bada, orduan $f(a) - g(a) > 0$ izango da.
- $f(b) < g(b)$ bada, orduan $f(b) - g(b) < 0$ izango da.

Orduan, $[f(a) - g(a)]$*-ren zeinua* $\neq [f(b) - g(b)]$*-ren zeinua.*

Bolzano-ren teoremari esker, ziurta dezakegu badagoela $c \in (a, b)$ puntu bat gutxienez $f(c) - g(c) = 0$ beteko duena, hau da $f(c) = g(c)$. ($f(x)$ eta $g(x)$ $x = c$ puntuan ebakitzen dira).

s47 **$f(x)$ jarraitua bada [1, 9] tartean, $f(1) = -5$ eta $f(9) > 0$ badira, ziurta dezakegu honako funtzio honek $g(x) = f(x) + 3$ zero bat gutxienez baduela [1, 9] tartean?**

- $f(x)$ jarraitua bada [1, 9] tartean, orduan $g(x) = f(x) + 3$ funtzioa ere jarraitua izango da [1, 9] tartean (jarraituen batura baita).
- $f(1) = -5$ bada, orduan $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- $f(9) > 0$ bada, orduan $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Beraz, $g(1)$*-en zeinua* $\neq g(9)$*-ren zeinua.*

Bolzanoren teoremari esker baiezta dezakegu badagoela $c \in (1, 9)$ puntu bat gutxienez, $g(c) = 0$ beteko duena, orduan, $g(x)$ funtzioak zero bat dauka gutxienez [1, 9] tartean.

48 **Idatzi definizio bat honako adierazpen hauetako bakoitzerako, eta egin f-ren adierazpen bat.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

a) $\varepsilon > 0$ emanda, existitzen da h, non, $x > -h$ bada, orduan $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

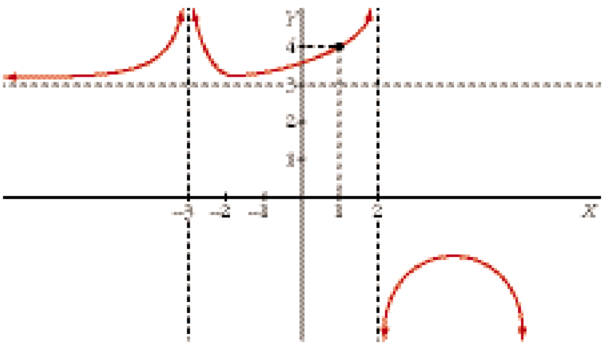
b) k emanda, beti egongo da h, non, $x > h$ bada, orduan $f(x) < -k$.

c) k emanda, beti egongo da δ, non, $2 - \delta < x < 2$ bada, orduan $f(x) > k$.

d) k emanda, beti egongo da δ, non, $2 < x < 2 + \delta$ bada, orduan $f(x) < -k$.

e) k emanda, beti egongo da δ, non, $3 - \delta < x < 3 + \delta$ bada, orduan $f(x) > k$.

f) $\varepsilon > 0$ emanda, existitzen da $\delta > 0$, non, $1 - \delta < x < 1 + \delta$ bada, orduan $|f(x) - 4| < \varepsilon$.



253. orrialdea

SAKONTZEKO

49 **Aztertu funtzio hauetako bakoitzaren jokabidea x-k $+\infty$-ra jotzen duenean:**

a) $f(x) = x^3 - \sin x$ **b)** $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$ **d)** $j(x) = \dfrac{3x + \sin x}{x}$

a) $-1 \le \sin x \le 1$ denez, orduan: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - \sin x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) $-1 \le \cos x \le 1$ denez, orduan: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) $x - 1 < E[x] < x$ denez,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E[x]}{x} < \frac{x}{x} \to \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} < \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} < \lim_{x \to +\infty} 1 \to$$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} = 1$$

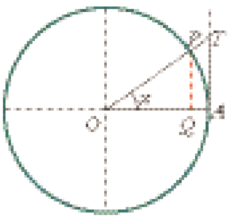
d) $-1 \le \sin x \le 1$ denez,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\pm 1}{x}\right) = 3 + 0 = 3$$

50 **Erradioa 1 duen zirkunferentzia batean, x radianeko $\widehat{AOP}$ angelua hartu dugu. Honako hau ikusten dugu:**

$\overline{PQ} = \sin x$, $\overline{TA} = tg\ x$ eta arc $\overset{\frown}{PA} = x$

$\overline{PQ} < \overset{\frown}{PA} < \overline{TA}$ denez $\to$ $\sin x < x < tg\ x$



Desberdintza horretatik abiatuta, frogatu honako hau:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\sin x < x < tg\ x$ daukagu. $\sin x$-rekin zatituz, hauxe daukagu:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \to 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Limiteak hartuz $x \to 0$ doanean, hauxe izango genuke:

$$1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \ge 1; \text{ hau da: } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

51 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ **dela jakinda, kalkulatu:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 1 \left(2x = z \text{ eginez, } \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1 \text{ daukagu}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 1 - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x / \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right) =$

$= 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} =$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

52 **Pentsa dezagun f jarraitua dela [0, 1] tartean, eta $0 < f(x) < 1$ dela [0, 1] tarteko x guztietarako. Frogatu $f(c) = c$ betetzen duen (0, 1)-ko c zenbaki bat dagoela.**

Egin grafiko bat emaitza agerikoa izan dadin.

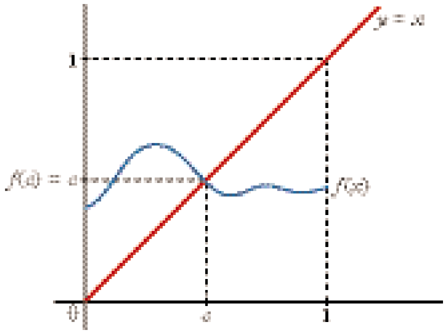
☛ ***Ezarri Bolzanoren teorema $g(x) = f(x) - x$ funtzioari.***

Har dezagun $g(x) = f(x) - x$. funtzioa. Hauxe daukagu:

- $g(x)$ jarraitua da [0, 1] tartean, [0, 1]-ean jarraituak diren bi funtzioren kendura baita, eta jarraituen kendura jarraitua da.
- $g(0) = f(0) > 0$, zeren $f(x) > 0$, [0, 1]-eko x ororentzat.

• $g(1) = f(1) - 1 < 0$, zeren $f(x) < 1$, $[0, 1]$-eko x ororentzat.

Bolzano-ren teoremari esker dakigu badagoela $c \in (0, 1)$, $g(c) = 0$ beteko duena, hots, $f(c) - c = 0$, edo $f(c) = c$.



253. orrialdea

AUTOEBALUAZIOA

1. Kalkulatu honako limite hauek:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2 + 1)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1} = -\infty$, kenkizuna 2. mailakoa delako eta kentzailea 3. mailakoa.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2 + 1)} = \dfrac{(0)}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} \to (1)^{(+\infty)}$ motakoa denez erregela aplika dezakegu:

$$\lim_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1}\left((x-1)\cdot\frac{1}{1-x}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right) = (\infty) - (\infty)$

Indeterminazioa $2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}$ adierazpenaz bidertuz eta zatituz ebatziko dugu:

$$\frac{\left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right)\left(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}\right)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2}{2 + \sqrt{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

2. $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \text{ bada} \\ 1 - x & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$ **funtzioa emanda:**

a) Aztertu horren jarraitasuna.

b) Aurkitu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **eta** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**.**

a) $x \neq 0$ bada, f jarraitua da e^x eta $1 - x$ jarraituak baitira $\mathbb{R}$ osoan.

Funtzioaren jarraitasuna aztertuko dugu $x = 0$-an.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(1) \to f \text{ jarraitua da } \mathbb{R} \text{ osoan.}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3. a) Aztertu $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x}$ **funtzioaren jarraitasuna, eta justifikatu zer eten mota duen.**

b) Aurkitu horren limiteak $x \to +\infty$ **eta** $x \to -\infty$ **denean.**

c) Adierazi a) eta b) puntuetan lortutako informazioa.

a) Funtzioa etena da definitu gabeko puntuetan. Eten-puntu horiek izendatzailea zero eginez aurkituko ditugu:

$$x^2 + 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Etenguneak aztertuko ditugu:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = \dfrac{(9)}{(0)} = \pm\infty \begin{cases} x \to 0^- \text{ badoa, } f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+ \text{ badoa, } f(x) \to +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = \dfrac{(0)}{(0)} \to \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\cancel{(3 + x)}(3 - x)}{x\cancel{(x + 3)}} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 - x}{x} = -2$

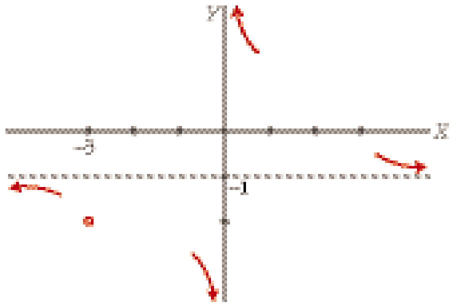
  $x = 0$-an, jauzi infinituko etena du.

  $x = -3$-an, eten saihesgarria.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

c)



4. **Kalkulatu *a*-ren balioa** $\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{1}{2}$ **izan dadin.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \rightarrow 4 = \sqrt{a} \rightarrow a = 16$$

5. **Kalkulatu *a*-ren eta *b*-ren balioa beheko funtzio hau jarraitua izan dadin, eta adierazi:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 0 \text{ bada} \\ x - a & 0 \le x < 1 \text{ bada} \\ \dfrac{a}{x} + b & 1 \le x \text{ bada} \end{cases}$$

$f(x)$ funtzioak jarraitua izateko, $x = 0$-an, honako baldintzak bete behar ditu:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} ax^2 + b = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x - a = -a \\ f(0) = -a \end{array}\right\} b = -a \qquad (1)$$

Eta jarraitua izateko, $x = 1$-ean, beste hauek:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{a}{x} + b = a + b \\ f(1) = a + b \end{array}\right\} 1 - a = a + b \qquad (2)$$

(1) eta (2) adierazpenetatik hauxe lortzen dugu: $1 - a = a - a \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$a = 1$ eta $b = -1$ badira, funtzioa jarraitua da $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan.

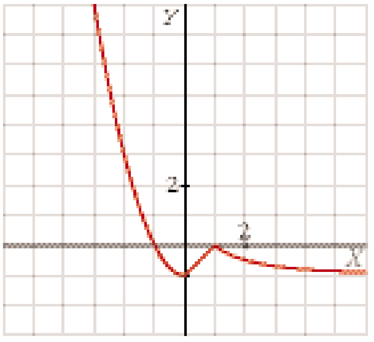
$x < 0$ denerako edo $0 \le x < 1$, f funtzio polinomikoek definitzen dute, eta hauek jarraituak dira.

$x \ge 1$ denerako, $\frac{a}{x} + b$ funtzioa ere jarraitua da.

Beraz, $a = 1$ eta $b = -1$ badira, f jarraitua da bere definizio-eremu osoan.

Adierazpen grafikoa:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \text{ bada} \\ x - 1 & 0 \le x < 1 \text{ bada} \\ \dfrac{1}{x} - 1 & 1 \le x \text{ bada} \end{cases}$$



6. $\boldsymbol{f(x) = sin\,\frac{\pi}{4}x}$ **funtzioa emanda, egiaztatu existitzen dela $\boldsymbol{c \in (0, 4)}$ zenbaki bat $\boldsymbol{f(c) = f(c+1)}$ betetzen duena.**

Honako funtzio hau eraikitzen dugu: $g(x) = f(x+1) - f(x) = sin\,\dfrac{\pi(x+1)}{4} - sin\,\dfrac{\pi x}{4}$

$f(c+1) = f(c)$ beteko duen punturen bat $c \in (0, 4)$ badagoela frogatzea eta $c \in (0, 4)$ beteko duen $g(c) = 0$ existitzen dela frogatzea, gauza bera da.

$$g(0) = sin\,\frac{\pi(0+1)}{4} - sin\,\frac{\pi \cdot 0}{4} = sin\,\frac{\pi}{4} - sin\,0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$g(4) = sin\,\frac{5\pi}{4} - sin\,\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

g funtzioa jarraitua da $[0, 4]$ tartean eta $g(0)$*-ren zeinua* $\neq$ $g(4)$*-ren zeinua*.

Bolzano-ren teoremaren arabera, badago punturen bat $c \in (0, 4)$, non, $g(c) = 0$ den; hau da, existitzen da punturen bat $c \in (0, 4)$, non, $f(c+1) = f(c)$ den.

7. $\boldsymbol{f(x) = x + e^{-x}}$ **funtzioa daukagu. Egiaztatu existitzen dela $\boldsymbol{c + e^{-c} = 4}$ betetzen duen $\boldsymbol{c}$ zenbaki errealen bat.**

$f(x) = x + e^{-x}$ jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan. Kalkula ditzagun f-ren balio batzuk:

$f(0) = 0 + e^0 = 1$ $\qquad$ $f(5) = 5 + e^{-5} = 5{,}007$

Tarteko balioen teoremaren arabera, $f(x)$ funtzioak $[1; 5{,}007]$ tarteko balio guztiak hartzen ditu.

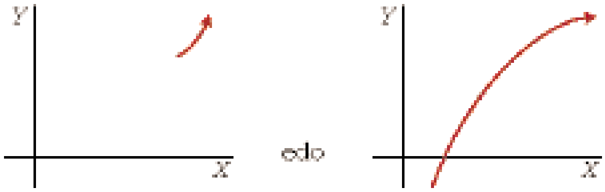
Beraz, egongo dan $0 < c < 5$ tarteko punturen bat, non, $f(c) = 4$. beteko den. Hau da, $c + e^{-c} = 4$

8. **Adierazi modu sinbolikoan honako esaldi hauetako bakoitza, eta egin kasu bakoitzaren adierazpen grafiko bat:**

a) ***f*(*x*) funtzioa *K* edozein zenbaki baino handiagoa izatea lor dezakegu, zenbaki hori oso handia izanda ere, *x*-ri behar bezain balio handiak emanez.**

b) ***g*(*x*) funtzioaren balioak 1etik guk nahi bezain gertu egotea nahi badugu, *x*-ri nahikoa balio handiak eman beharko dizkiogu.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$