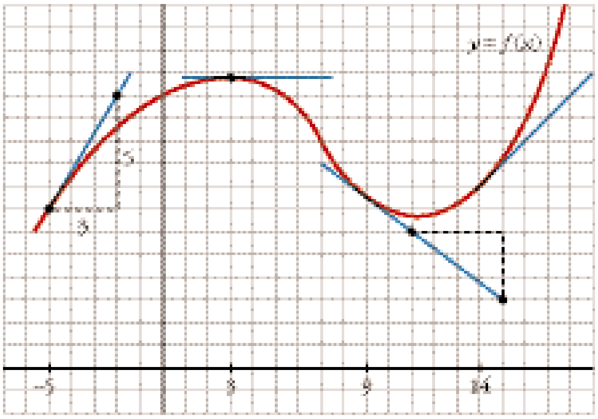
9 DERIBATUAK. DERIBAZIO TEKNIKAK

255. orrialdea

HAUSNARTU ETA EBATZI

Kurba batekiko ukitzaileak



■ **Grafikoari eta marrazturiko zuzenari begiratuz, kalkulatu $f'(3)$, $f'(9)$ eta $f'(14)$.**

$f'(3) = 0;\ f'(9) = \frac{-3}{4};\ f'(14) = 1$

■ **Adierazi deribatua positiboa den beste hiru puntu.**

$x = -4,\ x = -2,\ x = 0\ldots$

■ **Adierazi deribatua zero den beste puntu bat.**

$x = 11$

■ **Adierazi deribatua negatiboa den beste bi puntu.**

$x = 4,\ x = 5\ldots$

■ **Adierazi "$x \in [a, b]$ bada, orduan $f'(x) > 0$ dela" betetzen duen $[a, b]$ tarte bat.**

$[-5, 2]$ tartean betetzen da: $x \in [-5, 2]$ bada, orduan $f'(x) > 0$.

Funtzio deribatua

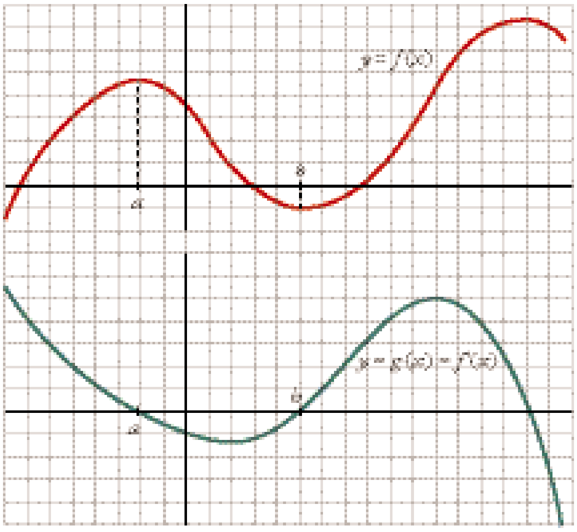
- **Jarraitu idazten zergatik den $g(x)$ funtzioa $f(x)$-ren deribatuari dagokion jarrera duen funtzio bat.**

  - (a, b) tartean, $f(x)$ beherakorra da. Beraz, bere deribatua negatiboa da. Eta horixe da $g(x)$ (a, b) tartean.
  - f-ren deribatua b-n 0 da: $f'(b) = 0$. Eta $g(b) = 0$.
  - Oro har:

    $g(x) = f'(x) = 0$ da $f(x)$-k ukitzaile horizontala badu.

    $g(x) = f'(x) > 0$ da $f(x)$ gorakorra bada.

    $g(x) = f'(x) < 0$ da $f(x)$ beherakorra bada.



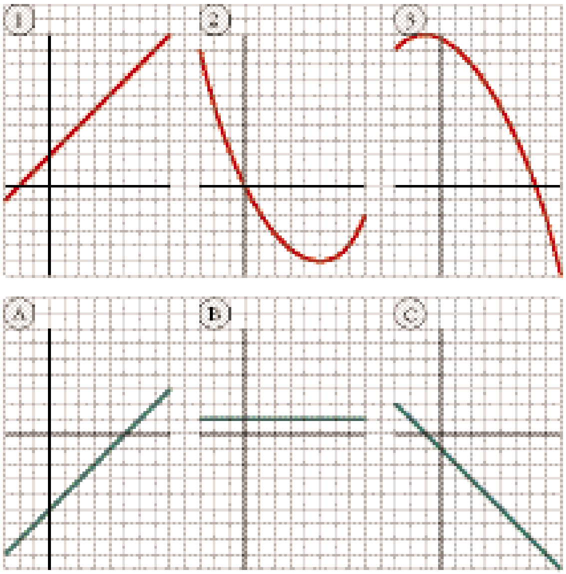
- **Beheko hiru grafikoak, A, B eta C, goiko 1, 2 eta 3 grafikoen funtzio deribatuak dira, baina beste ordena batean. Azaldu, arrazoituz, zein den bakoitzarena.**

1) B

2) A

3) C

Deribatua zero egiten da ukitzaile horizontaleko puntuetan, positiboa da funtzioa gorakorra denean, eta negatiboa funtzioa beherakorra denean.



261. orrialdea

1. **Kalkulatu honako funtzio hauetako bakoitzaren deribatua:**

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log(sin\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sin^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sin\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\,sin\sqrt{x}$

l) $f(x) = sin(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sin\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x+(3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Aurreko a) ataleko emaitzaz baliatuz:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Aurreko a) ataleko emaitzaz baliatuz:

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

Beste era batera: Lehenengo logaritmoak hartuz:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Deribatuz:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x)-(1-tg\,x)\cdot(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

Beste era batera: a) ataleko emaitza kontuan izanda:

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) d) ataleko emaitza kontuak izanda:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\,x)}{(1 + tg\,x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\,x)}{\sqrt{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)^3}}$$

b) atalean lortutakoarekin ere leku berera iritsiko ginen.

f) $f(x) = ln\,\sqrt{e^{tg\,x}} = ln\,e^{(tg\,x)/2} = \dfrac{tg\,x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\,x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\,3 = \dfrac{ln\,3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sin\,x \cdot cos\,x)^2 = 2[log\,(sin\,x + log\,(cos\,x)]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\,x}{sin\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} + \frac{-sin\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10}\right] = \frac{2}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sin^2\,x}{sin\,x \cdot cos\,x} =$$

$$= \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos^2\,x - sin^2\,x}{2sin\,x \cdot cos\,x} = \frac{4}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{sin\,2x} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

Beste era batera:

$$f(x) = log\,(sin\,x \cdot cos\,x)^2 = 2\,log\left(\frac{sin\,2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{cos\,2x}{\dfrac{sin\,2x}{2}} = \frac{4}{ln\,10 \cdot tg\,2x}$$

i) $f(x) = sin^2\,x + cos^2\,x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sin\,\sqrt{x+1} \cdot \left(-sin\,\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\,\sqrt{x+1} \cdot cos\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sin\,\sqrt{x+1} \cdot sin\,\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

l) $f'(x) = cos\,\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sin\,x + x^2 + 1}} \cdot (cos\,x + 2x) = \dfrac{cos\,x + 2x}{2\sqrt{sin\,x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2cos\ \sqrt[3]{x + (3 - x)^2} \cdot \left[-sin\ \sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3 - x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}} =$

$$= \frac{-2\ cos\ \sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\ sin\ \sqrt[3]{x + (3 - x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{x + (3 - x)^2)^2}} =$$

$$= \frac{(5 - 2x) \cdot sin\left(2\sqrt[3]{x + (3 - x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3 - x)^2)^2}}$$

2. **Kalkulatu honako funtzio hauen 1., 2. eta 3. deribatuak:**

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sin^2\ x + cos^2\ x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x$

$y' = cos\ x - x\ sin\ x$

$y'' = -sin\ x - sin\ x - x\ cos\ x = -2sin\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sin\ x = -3cos\ x + x\ sin\ x$

c) $y = sin^2\ x + cos^2\ x + x = 1 + x$

$y' = 1;\ \ y'' = 0;\ \ y''' = 0$

3. **Kalkulatu** $f'(1)$**, honako hau izanda:** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\ x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\ \sqrt[30]{x^{17}}$$

Beraz: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4. **Kalkulatu** $f'(\pi/6)$**, honako hau izanda:**

$$f(x) = (cos^2\ 3x - sin^2\ 3x) \cdot sin\ 6x$$

$$f(x) = (cos^2\ 3x - sin^2\ 3x) \cdot sin\ 6x = cos\ 6x \cdot sin\ 6x = \frac{sin\ 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12cos\ 12x}{2} = 6cos\ 12x$$

Beraz: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\ \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos\ (2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5. **Kalkulatu $f'(0)$, honako hau izanda:**

$$\boldsymbol{f(x) = ln\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arc\ tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}}}$$

$$f(x) = ln\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\ tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\, ln\,(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\ tg\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2+4x+1}{3}} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 + 4x + 1} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{4x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2x+2} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

Beraz: $f'(0) = 0$

262. orrialdea

1. **Aztertu beheko funtzio horren deribagarritasuna $x_0 = 3$ puntuan:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}}$$

- Jarraitasuna $x_0 = 3$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0 \\ \text{Beraz, } f(x) \text{ jarraitua da } x_0 = 3 \text{ puntuan.} \end{array}$$

- Deribagarritasuna $x_0 = 3$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \text{Alboko deribatuak berdinak dira.}$$

Beraz, $f(x)$ deribagarria da $x_0 = 3$ puntuan. Eta gainera, $f'(3) = 3$.

2. Kalkulatu m eta n-ren balioa, $f(x)$ deribagarria izateko $\mathbb{R}$-n:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- $x \neq 0$ bada, funtzioa jarraitua eta deribagarria da, funtzio polinomikoak horrelakoxeak baitira.

- Jarraitasuna $x = 0$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

$f(x)$ jarraitua izan dadin $x = 0$ puntuan, hauxe gertatu behar da: $n = 5$

- Deribagarritasuna $x = 0$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

$f(x)$ deribagarria izan dadin $x = 0$-n, hauxe gertatu behar da:

$$-m = 0 \quad \to \quad m = 0$$

Beraz, $f(x)$ deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan $m = 0$ eta $n = 5$ direnean.

263. orrialdea

1. Badakigu $f(x) = x^3$ funtzioaren deribatua $f'(x) = 3x^2$ dela.

Emaitza hori kontuan hartuta, aurkitu horren alderantzizko funtzioaren deribatua:

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

264. orrialdea

1. Egiaztatu $sin\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$ funtzioa $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ puntutik igarotzen dela, eta aurkitu puntu horretako zuzen ukitzailearen ekuazioa.

Ordezkatuz $x = 2$, $y = \dfrac{\pi}{4}$ ekuazioan:

$$sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} + 2 = 0 + 2 - \frac{\pi^2}{16} = 2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Berdintza betetzen da. Hortaz, kurba igarotzen da emandako $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ puntutik.

Malda kalkulatu ahal izateko, $f'\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ behar dugu. Eta horretarako $f'(x, y)$ kalkulatuko dugu:

$sin\ (x^2 y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$ deribatuz:

$$cos\ (x^2 y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') - 2y \cdot y' + 1 = 0$$

$$2xy\ cos\ (x^2 y) + y' \cdot x^2 \cdot cos\ (x^2 y) - 2yy' + 1 = 0$$

$$y'\left(x^2 \cdot cos\ (x^2 y) - 2y\right) = -1 - 2xy\ cos\ (x^2 y)$$

$$f'(x, y) = \frac{-1 - 2xy\ cos\ (x^2 y)}{x^2 \cdot cos\ (x^2 y) - 2y}$$

Beraz:

$$f'\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 - \pi \cdot cos\ \pi}{4\ cos\ \pi - \pi/2} = \frac{-1 + \pi}{-4 - \pi/2} = \frac{-2 + 2\pi}{-8 - \pi} = \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}$$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa, hortaz: $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}(x - 2)$

2. Kalkulatu honako funtzio hauetako bakoitzaren deribatua:

a) $\boldsymbol{f(x) = (sin\ x)^x}$ **b)** $\boldsymbol{g(x) = x^{sin\ x}}$

a) $f(x) = (sin\ x)^x \ \rightarrow\ ln\ f(x) = x\ ln\ (sin\ x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\ (sin\ x) + x \cdot \frac{cos\ x}{sin\ x} \ \rightarrow\ f'(x) = (sin\ x)^x \left[ln\ (sin\ x) + \frac{x\ cos\ x}{sin\ x}\right]$$

b) $g(x) = x^{sin\ x} \ \rightarrow\ ln\ g(x) = sin\ x \cdot ln\ x$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = cos\ x \cdot ln\ x + sin\ x \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^{sin\ x} \cdot \left[cos\ x \cdot ln\ x + \frac{sin\ x}{x}\right]$$

270. orrialdea

1. Kalkulatu $\boldsymbol{\Delta y}$, $\boldsymbol{dy}$, $\boldsymbol{\Delta y - dy}$:

a) $\boldsymbol{y = x^2 - x,\ x_0 = 3,\ dx_0 = 0{,}01}$ **denean**

b) $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 - 1},\ x_0 = 2,\ dx_0 = 0{,}1}$ **denean**

c) $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 125,\ dx_0 = 1}$ **denean**

a) $\Delta y = y(3{,}01) - y(3) = 6{,}0501 - 6 = 0{,}0501$

$dy = y' \cdot dx = (2x - 1) \cdot dx$, $x_0 = 3$-an eta $dx_0 = 0{,}01$-ean ebaluatuz:

$5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$

$\Delta y - dy = 0{,}0001$

b) $\Delta y = y(2{,}1) - y(2) = 1{,}8466 - 1{,}7321 = 0{,}1145$

$dy = y' \cdot dx = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot dx$, $x_0 = 2$-an eta $dx_0 = 0{,}1$-ean ebaluatuz:

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}1 = 0{,}1155$

$\Delta y - dy = -0{,}001$

c) $\Delta y = y(126) - y(125) = 5{,}01330 - 5 = 0{,}01330$

$dy = y' \cdot dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx$, $x_0 = 125$-ean eta $dx_0 = 1$-ean ebaluatuz:

$\dfrac{1}{75} \cdot 1 = 0{,}01333$

$\Delta y - dy = -0{,}00003$

2. Erradioa 7 cm-koa duen brontzezko bola bati 0,2 mm-ko lodiera duen zilarrezko bainu bat eman zaio. Kalkulatu erabilitako zilar kantitatea (gutxi gorabehera, diferentzialetik abiatuta).

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$dV = 4\pi r^2 \cdot \text{h} = 4\pi \cdot 7^2 \cdot 0{,}02 = 12{,}3088$

Gutxi gorabehera 12,3 cm^3 zilar erabiltzen da.

3. Kalkulatu $\sqrt[3]{126}$-ren hurbilketa bat, honako urrats hauetako bakoitza emanda:

- **Deitu $f(x) = \sqrt[3]{x}$.**
- **Lortu df, $x_0 = 125$ eta $dx_0 = 1$ direnerako.**
- **Lortu $f(126) \approx f(125) + df(125)$, $dx_0 = 1$ direnerako.**

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$df = f'(x) \cdot dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx$

$x_0 = 125$-ean eta $dx_0 = 1$-ean ebaluatuz:

$df(125) = \dfrac{1}{75} = 0{,}0133$

Eta hortik:

$f(126) \approx f(125) + df(125) = 5 + 0{,}0133 = 5{,}0133$

4. **Aurreko ariketan bezala jokatuta, kalkulatu, gutxi gorabehera:**

a) $\mathbf{1{,}01^4}$

b) $\sqrt{\mathbf{15{,}8}}$

c) $\sqrt[3]{\mathbf{66}}$

a) $f(x) = x^4; \;\; x_0 = 1; \;\; dx_0 = 0{,}01$

$df = f'(x) \cdot dx = 4x^3 \cdot dx = 4 \cdot 1^3 \cdot 0{,}01 = 0{,}04$

$f(1{,}01) \approx f(1) + df(1) = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$

b) $f(x) = \sqrt{x}\,; \;\; x_0 = 16; \;\; dx_0 = -0{,}2$

$$df = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (-0{,}2) = -0{,}025$$

$f(15{,}8) \approx f(16) + df(16) = \sqrt{16} - 0{,}025 = 3{,}975$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,; \;\; x_0 = 64; \;\; dx_0 = 2$

$$df = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot 2 = 0{,}0417$$

$f(66) \approx f(64) + df(64) = 4 + 0{,}0417 = 4{,}0417$

275. orrialdea

PROPOSATUTAKO ARIKETAK ETA PROBLEMAK

TREBATZEKO

Deribazio-erregelak

Kalkulatu honako funtzio hauen deribatuak:

1 **a)** $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \sqrt[3]{3x^2}$

a) $y' = \dfrac{2x(x^2 + 3) - (x^2 - 3)\,2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

2 **a)** $y = \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^{2/3}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 \cdot (1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3}\,\dfrac{-2}{(1 - x)^{1/3} \cdot (1 + x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1 - x)(1 + x)^5}}$

b) $y' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

3 **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $y = 7e^{-x}$

a) $y' = \dfrac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $y = -7e^{-x}$

4 **a)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \sin x \cos x$

a) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

5 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{\sin x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \ln(x^2 + 1)}$

a) $y' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ b) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

6 **a)** $\boldsymbol{y = \text{arc tg}\,\dfrac{x}{3}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \cos^2 (2x - \pi)}$

a) $y' = \dfrac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1 + x^2/9} = \dfrac{3}{9 + x^2}$

b) $y' = 2\cos (2x - \pi) \cdot \big(-\sin (2x - \pi)\big) \cdot 2 = -4\cos (2x - \pi) \cdot \sin (2x - \pi) =$

$= -2\cos (4x - 4\pi)$

7 **a)** $\boldsymbol{y = \sin^2 x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{\text{tg}\, x}}$

a) $y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{tg}\, x}} \cdot (1 + \text{tg}^2\, x) = \dfrac{1 + \text{tg}^2\, x}{2\sqrt{\text{tg}\, x}}$

8 **a)** $\boldsymbol{y = \sin x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = \text{arc tg}\,(x^2 + 1)}$

a) $y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

9 **a)** $\boldsymbol{y = (2\sqrt{x} - 3)^7}$ **b)** $\boldsymbol{y = \log_2 \sqrt{x}}$

a) $y' = 7\big(2\sqrt{x} - 3\big)^6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}\big(2\sqrt{x} - 3\big)^6$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x \ln 2}$

10 **a)** $\boldsymbol{y = \sin^2 x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}}$

a) $y' = 2\sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 4x \sin x^2 \cos x^2 = 2x \sin (2x^2)$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

11 **a)** $\boldsymbol{y = \cos^5 (7x^2)}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3^x + 1}$

a) $y' = 5\cos^4 (7x^2) \cdot \big(-\sin (7x^2)\big) \cdot 14x = -70x \cos^4 (7x^2) \sin (7x^2)$

b) $y' = 3^x \ln 3$

12 **a)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\ sin\ \frac{x^2}{3}}$

a) $y' = \frac{2}{3}(5x-3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x-3}}$

b) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x/3}{\frac{\sqrt{9-x^4}}{3}} = \frac{2x}{\sqrt{9-x^4}}$

13 **a)** $\boldsymbol{y = ln(2x-1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = tg\ \frac{x^2}{2}}$

a) $y' = \frac{2}{2x-1}$

b) $y' = \left(1 + tg^2\ \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{2x}{2} = x + x\ tg^2\ \frac{x^2}{2}$

14 **a)** $\boldsymbol{y = ln(x^2-1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\ cos\ \sqrt{2x}}$

a) $y' = \frac{2x}{x^2-1}$

b) $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{-1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}$

15 **a)** $\boldsymbol{y = ln\sqrt{1-x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = (arc\ tg\ x)^2}$

a) $y = ln\ \sqrt{1-x} = ln\ (1-x)^{1/2} = \frac{1}{2}\ ln\ (1-x)$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(1-x)} = \frac{-1}{2-2x}$

b) $y' = 2(arc\ tg\ x) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2\ arc\ tg\ x}{1+x^2}$

16 **a)** $\boldsymbol{y = log_3(7x+2)}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln\,tg\ \frac{3}{x}}$

a) $y' = \frac{1}{ln\ 3} \cdot \frac{7}{(7x+2)} = \frac{7}{(7x+2)\ ln\ 3}$

b) $y' = \frac{1}{tg\ 3/x} \cdot \left(1 + tg^2\ \frac{3}{x}\right) \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{3\ (1 + tg^2\ 3/x)}{x^2\ tg\ 3/x}$

17 **a)** $\boldsymbol{y = e^{4x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln\left(ln\ \frac{1}{x}\right)}$

a) $y' = 4e^{4x}$

b) $y' = \frac{1}{ln\ 1/x} \cdot \frac{1}{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\,ln\,(1/x)}$

18 **a)** $y = 2^x$ **b)** $y = arc\ sin \dfrac{x+1}{x-1}$

a) $y' = 2^x \cdot ln\ 2$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}}{x-1}} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2} =$

$$= -\frac{2/(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}} = \frac{2}{(x-1)\sqrt{x^2+1-2x-x^2-1-2x}} =$$

$$= -\frac{2}{(x-1)\sqrt{-4x}}$$

19 **a)** $y = 5\ tg^3(3x^2+1)$ **b)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y' = 15\ tg^2\ (3x^2+1) \cdot [1 + tg^2\ (3x^2+1)] \cdot 6x = 90x\ [tg^2\ (3x^2+1) + tg^4\ (3x^2+1)]$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

20 **a)** $y = \sqrt{tg\ x^2}$ **b)** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}$

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\ x^2}}(1 + tg^2\ x^2) \cdot 2x = \dfrac{x(1+tg^2\ x^2)}{\sqrt{tg\ x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{-2/3} \cdot \dfrac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2}} \cdot \dfrac{4}{(x+2)^2} =$

$$= \frac{4}{3 \cdot (x+2)^2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{(x+2)^{2/3}}} = \frac{4}{3(x+2)^{4/3} \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(x+2)^4\ (x-2)^2}} =$$

$$= \frac{4}{3(x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}$$

Deribatzeko beste teknika batzuk

21 **Kalkulatu honako funtzio hauen deribatua, aldez aurretik logaritmoen propietateak ezarriz:**

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **b)** $y = ln(x\ tg\ x)^2$

c) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)$ **d)** $y = ln(2^x\ sin^2\ x)$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1-x) - ln\,(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2}$$

b) $y = ln\,(x\,tg\,x)^2 = 2[ln\,x + ln\,(tg\,x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\,x}{tg\,x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{tg\,x} + tg\,x\right] = \frac{2}{x} + 2\,cotg\,x + 2\,tg\,x$$

c) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right) = ln\,\sqrt[3]{x^2-1} - ln\,x^2 = \dfrac{1}{3}\,ln\,(x^2-1) - 2ln\,x$

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)} - 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{x}$$

d) $y = ln\,(2^x\,sin^2\,x) = ln\,2^x + ln\,sin^2\,x = x\,ln\,2 + 2\,ln\,sin\,x$

$$y' = ln\,2 + 2\cdot\frac{cos\,x}{sin\,x} = ln\,2 + \frac{2}{tg\,x}$$

22 **Kalkulatu honako funtzio inplizitu hauen deribatua:**

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(y+3)^2}{14} = 1$

e) $x^3 + y^3 = -2xy$

f) $xy^2 = x^2 + y$

a) $2x + 2y\cdot y' = 0$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

b) $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$$y'(2y-6) = 4 - 2x$$

$$y' = \frac{4-2x}{2y-6} = \frac{2-x}{y-3}$$

c) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$$\frac{x}{8} + \frac{2yy'}{9} = 0$$

$$\frac{2yy'}{9} = -\frac{x}{8} \;\rightarrow\; 2yy' = \frac{-9x}{8} \;\rightarrow\; y' = \frac{-9x}{16y}$$

d) $\dfrac{2(x-1)}{8} - \dfrac{2(y+3)y'}{14} = 0$

$\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{(y+3)y'}{7} = 0$

$y' = \dfrac{7(x-1)}{4(y+3)}$

e) $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$

$y' = \dfrac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$

f) $xy^2 = x^2 + y$

$y^2 + x \cdot 2yy' = 2x + y'$

$2xyy' - y' = 2x - y^2$

$y'(2xy - 1) = 2x - y^2$

$y' = \dfrac{2x - y^2}{2xy - 1}$

23 Erabili deribazio logaritmikoa honako hauek deribatzeko:

a) $\boldsymbol{y = x^{3x}}$

b) $\boldsymbol{y = x^{x+1}}$

c) $\boldsymbol{y = x^{e^x}}$

d) $\boldsymbol{y = (\ln x)^{x+1}}$

e) $\boldsymbol{y = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x}$

f) $\boldsymbol{y = x^{tg\, x}}$

a) Logaritmoak hartzen ditugu ekuazioaren alde bietan eta berreketaren logaritmoa berretzailea bider berrekizunaren logaritmoa delako propietatea aplikatzen dugu $\ln x^n = n \ln x$:

$y = x^{3x} \;\rightarrow\; \ln y = 3x \ln x$

Inplizituki deribatuz:

$\dfrac{y'}{y} = 3 \ln x + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3 \ln x + 3$

y' isolatuz:

$y' = x^{3x}(3\ln x + 3)$

b) Logaritmoak hartzen ditugu ekuazioaren alde bietan eta berreketaren logaritmoa berretzailea bider berrekizunaren logaritmoa delako propietatea aplikatzen dugu $\ln x^n = n \ln x$:

$y = x^{x+1} \;\rightarrow\; \ln y = (x+1) \ln x$

Inplizituki deribatuz:

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + (x+1) \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 + \dfrac{1}{x}$

y' isolatuz:

$$y' = x^{x+1}\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)$$

c) Logaritmoak hartzen ditugu ekuazioaren alde bietan eta berreketaren logaritmoa berretzailea bider berrekizunaren logaritmoa delako propietatea aplikatzen dugu $\ln x^n = n \ln x$:

$$y = x^{e^x} \quad \rightarrow \quad \ln y = e^x \cdot \ln x$$

Inplizituki deribatuz:

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

y' isolatuz:

$$y' = x^{e^x} \cdot e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

d) Logaritmoak hartzen ditugu ekuazioaren alde bietan eta berreketaren logaritmoa berretzailea bider berrekizunaren logaritmoa delako propietatea aplikatzen dugu $\ln x^n = n \ln x$:

$$y = (\ln x)^{x+1} \quad \rightarrow \quad \ln y = (x+1) \cdot \ln(\ln x)$$

Inplizituki deribatuz:

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + (x+1) \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \ln(\ln x) + \frac{x+1}{x \ln x}$$

y' isolatuz:

$$y' = (\ln x)^{x+1} \cdot \left[\ln(\ln x) + \frac{x+1}{x \ln x}\right]$$

e) Logaritmoak hartzen ditugu ekuazioaren alde bietan eta berreketaren logaritmoaren propietate hau aplikatzen dugu $\ln x^n = n \ln x$ eta zatiketaren logaritmoa logaritmoen kendura dela:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b:$$

$$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x \quad \rightarrow \quad \ln y = x \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = x\left(\ln(\sin x) - \ln x\right)$$

Inplizituki deribatuz:

$$\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) - \ln x + x\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \frac{x \cos x}{\sin x} - 1$$

y' isolatuz:

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \frac{x \cos x}{\sin x} - 1\right]$$

f) Logaritmoak hartzen ditugu ekuazioaren alde bietan eta berreketaren logaritmoa berretzailea bider berrekizunaren logaritmoa delako propietatea aplikatzen dugu $\ln x^n = n \ln x$:

$$y = x^{tg\,x} \;\rightarrow\; \ln y = tg\,x \cdot \ln x$$

Inplizituki deribatuz:

$$\frac{y'}{y} = (1 + tg^2\,x) \cdot \ln x + (tg\,x) \cdot \frac{1}{x}$$

y' isolatuz:

$$y' = x^{tg\,x} \cdot \left[(1 + tg^2\,x) \ln x + \frac{tg\,x}{x} \right]$$

24 **Lortu honako funtzio hauen deribatua bi modutan, eta egiaztatu, eragiketak eginez, emaitza bera lortzen duzula:**

I) Ezagutzen dituzun deribazio erregelak erabiliz.

II) Deribazio logaritmikoa erabiliz.

a) $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3$ **b)** $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

c) $y = \sin^3 x \cos^2 x$ **d)** $y = \sqrt{x^2 + 1}\,\sqrt[3]{x^2}$

a) I) $y' = 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{3 \cdot (x^2+1)^2 (x^2 - 1)}{x^4}$

II) $\ln y = 3\big(\ln (x^2 + 1) - \ln x\big)$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2+1)}\right) = \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)} = \frac{3 \cdot (x^2+1)^2 (x^2-1)}{x^4}$$

b) I) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$

II) $\ln y = \frac{1}{2}\,[\ln (1 + x) - \ln (1 - x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - x + 1 + x}{(1+x)(1-x)}\right] = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

c) I) $y' = 3sin^2\, x\; cos\, x \cdot cos^2\, x + sin^3\, x \cdot 2cos\, x\, (-sin\, x) =$

$= 3sin^2\, x\; cos^3\, x - 2cos\, x\; sin^4\, x$

II) $ln\, y = 3ln\,(sin\, x) + 2ln\,(cos\, x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\,\frac{cos\, x}{sin\, x} + 2 \cdot \frac{-sin\, x}{cos\, x} = \frac{3cos^2\, x - 2sin^2\, x}{sin\, x\; cos\, x}$$

$$y' = sin^3\, x\; cos^2\, x \cdot \frac{3cos^2\, x - 2sin^2\, x}{sin\, x\; cos\, x} = sin^2\, x\; cos\, x\,(3cos^2\, x - 2sin^2\, x) =$$

$$= 3\,sin^2\, x\; cos^3\, x - 2cos\, x\; sin^4\, x$$

d) I) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} =$

$$= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

II) $ln\, y = \dfrac{1}{2}\, ln\,(x^2+1) + \dfrac{2}{3}\, ln\, x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2+2x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

25 **Kalkulatu honako funtzio hauetako bakoitzaren deribatua $x = 0$ puntuan:**

a) $g(x) = e^{sin\, f(x)}$ baldin eta $f(0) = 0$ eta $f'(0) = 1$ badira.

b) $h(x) = [sin\, f(x)]^3$ baldin eta $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ eta $f'(0) = 1$ badira.

c) $j(x) = \sqrt{ln\, f(x)}$ baldin eta $f(0) = e$ eta $f'(0) = 1$ badira.

a) Katearen erregela aplikatuz:

$g'(x) = D[sin\, f(x)] \cdot e^{sin\, f(x)} = f'(x)\; cos\, f(x)\; e^{sin\, f(x)}$

$g'(0) = f'(0)\; cos\, f(0)\; e^{sin\, f(0)} = 1 \cdot cos\, 0 \cdot e^{sin\, 0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

b) Katearen erregela aplikatuz:

$h'(x) = 3\,[sin\, f(x)]^2\; D[sin\, f(x)] = 3\,[sin\, f(x)]^2\; f'(x)\; cos\, f(x)$

$h'(0) = 3[sin\, f(0)]^2\; f'(0)\; cos\, f(0) =$

$$= 3\left[sin\, \frac{\pi}{4}\right]^2 \cdot 1 \cdot cos\, \frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Katearen erregela aplikatuz:

$$j'(x) = \frac{D[ln\,f(x)]}{2\sqrt{ln\,f(x)}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ln\,f(x)}}$$

$$j'(0) = \frac{f'(0)}{2f(0)\sqrt{ln\,f(0)}} = \frac{1}{2e\sqrt{ln\,e}} = \frac{1}{2e\sqrt{1}} = \frac{1}{2e}$$

26 **$f(x) = x^2$ eta $g(x) = 3x + 1$ emanda, aurkitu:**

a) $(f \circ g)'(x)$ **b) $(g \circ f)'(x)$**

a) $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$

$f(x) = x^2$ eta $g(x) = 3x + 1$ direnez $\rightarrow f'(x) = 2x;\ g'(x) = 3$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$

Edo bestela:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot 3(3x + 1) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\, f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

Edo bestela:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 3x^2 + 1 \rightarrow (g \circ f)'(x) = 6x$

276. orrialdea

Deribagarritasuna eta jarraitasuna

27 **a) Egiaztatu honako funtzio hau jarraitua eta deribagarria dela, eta aurkitu $f'(0)$, $f'(3)$ eta $f'(1)$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 1 \text{ bada} \\ x^2 + x & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$$

b) Zein da horren funtzio deribatua?

c) Zer puntutan betetzen da $f'(x) = 5$?

a) **$x \neq 1$ bada,** funtzioa jarraitua eta deribagarria da polinomio biz osaturikoa baita.

Jarraitasuna $x = 1$-ean:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\}\ f(x) \text{ jarraitua da } x = 1\text{-ean.}$$

Deribagarritasuna $x = 1$-ean:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\}$$ Alboko deribatuak berdinak dira.

Beraz, $f(x)$ deribagarria da $x = 1$-ean. Eta gainera $f'(1) = 3$.

Hortaz, $f(x)$ jarraitua eta deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) $f'(x) = 5$ izateko, $x \geq 1$ izan behar. Hortaz:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \to \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

28 **Egiaztatu $f(x)$ jarraitua dela baina ez deribagarria puntuan $x = 2$:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & x < 2 \text{ bada} \\ 3x - 6 & x \geq 2 \text{ bada} \end{cases}}$$

- $x \neq 2$ bada, funtzioa jarraitua eta deribagarria da.
- Jarraitasuna $x = 2$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$ f jarraitua da $x = 2$-an.

- Deribagarritasuna $x = 2$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Alboko deribatuak existitzen dira, baina ez dira berdinak.

Orduan, $f(x)$ ez da deribagarria $x = 2$-an.

29 **Aztertu honako funtzio hauen jarraitasuna eta deribagarritasuna:**

$$\textbf{a)}\ f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 0 \text{ bada} \\ 1 & 0 < x < 3 \text{ bada} \\ -x^2 + 3x + 2 & x \ge 3 \text{ bada} \end{cases}$$

$$\textbf{b)}\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < -1 \text{ bada} \\ 2x + 2 & -1 \le x \le 2 \text{ bada} \\ -x^2 + 8x & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$$

a) **$x \ne 0$ eta $x \ne 3$ bada,** $f(x)$ jarraitua eta deribagarria da.

Jarraitasuna $x = 0$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ jarraitua da } x = 0\text{-an.}$$

Jarraitasuna $x = 3$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Alboko limiteak ez dira berdinak, beraz, funtzioa ez da jarraitua $x = 3$-an.

Deribagarritasuna $x = 0$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\} \text{ Alboko deribatuak ez dira berdinak.}$$

$f(x)$ ez da deribagarria $x = 0$-an.

Deribagarritasuna $x = 3$-an:

$f(x)$ ez denez gero jarraitua $x = 3$, $f(x)$ ez da deribagarria $x = 3$-an.

b) **$x \ne -1$ eta $x \ne 2$ bada,** $f(x)$ jarraitua eta deribagarria da.

Jarraitasuna $x = -1$-ean:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ jarraitua da } x = -1\text{-ean.}$$

Jarraitasuna $x = 2$-an:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\} \text{ Alboko limiteak ez dira berdinak.}$$

$f(x)$ ez da jarraitua $x = 2$-an.

Deribagarritasuna $x = -1$-ean:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\} \text{ Alboko deribatuak ez dira berdinak.}$$

$f(x)$ ez da deribagarria $x = -1$-ean.

Deribagarritasuna $x = 2$-an:

$f(x)$ ez da jarraitua $x = 2$-an $\rightarrow$ $f(x)$ ez da deribagarria $x = 2$-an.

s30 Aztertu honako funtzio hauen jarraitasuna eta deribagarritasuna:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ bada} \\ x^2 & 0 \le x < 1 \text{ bada} \\ x & x \ge 1 \text{ bada} \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \le 0 \text{ bada} \\ 1 - x & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$

a) **Jarraitasuna:**

- **$x \ne 0$ eta $x \ne 1$ bada** $\rightarrow$ Jarraitua da, funtzio jarraituz osatuta baitago.

- **$x = 0$ bada:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Beraz, funtzioa jarraitua da } x = 0\text{-ean.}$$

- **$x = 1$ bada:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \text{ Beraz, funtzioa jarraitua da } x = 1\text{-ean.}$$

Funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

Deribagarritasuna:

- $\boldsymbol{x \neq 0}$ **eta** $\boldsymbol{x \neq 1}$ **bada** $\rightarrow$ Funtzioa deribagarria da. Bere deribatua puntu horietan hauxe baita:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ bada} \\ 2x & 0 < x < 1 \text{ bada} \\ 1 & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x = 0}$**-an:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Hortaz, $f(x)$ deribagarria da $x = 0$-an; eta $f'(0) = 0$.

- $\boldsymbol{x = 1}$**-ean:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Beraz, $f(x)$ ez da deribagarria $x = 1$-ean.

Funtzioa deribagarria da multzo honetan: $\mathbb{R} - \{1\}$. Eta bere deribatua, hauxe:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ bada} \\ 2x & 0 \leq x < 1 \text{ bada} \\ 1 & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

b) **Jarraitasuna:**

- $\boldsymbol{x \neq 0}$ **bada** $\rightarrow$ Funtzioa jarraitua da, funtzio jarraitu biz osaturik baitago.

- $\boldsymbol{x = 0}$ **puntuan:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Beraz, funtzioa jarraitua da $x = 0$-an.

Funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

Deribagarritasuna:

- $\boldsymbol{x \neq 0}$ **bada** $\rightarrow$ Funtzioa deribagarria da. Gainera:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x < 0 \text{ bada} \\ -1 & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x = 0}$ **bada:**

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Beraz, $f(x)$ deribagarria da $x = 0$-an eta $f'(0) = -1$. Funtzioa deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan. Eta deribatua hauxe da:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x < 0 \text{ bada} \\ -1 & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribatuaren definizioa

31 **Erabili deribatuaren definizioa $f'(2)$ aurkitzeko honako kasu hauetan:**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \to f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} f(2+h) = \dfrac{2+h-1}{2+h+1} = \dfrac{h+1}{h+3} \\ f(2) = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

$$f(2+h) - f(2) = \frac{h+1}{h+3} - \frac{1}{3} = \frac{3h + \cancel{3} - h - \cancel{3}}{3(h+3)} = \frac{2h}{3(h+3)}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2h}{3(h+3)} : h = \frac{2}{3(h+3)}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{3(h+3)} = \frac{2}{9}$$

b) $f(x) = \sqrt{x+2} \to f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \sqrt{4} = 2 \\ f(2+h) = \sqrt{2+h+2} = \sqrt{h+4} \end{array}\right\} f(2+h) - f(2) = \sqrt{h+4} - 2$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{h+4})^2 - 2^2}{(\sqrt{h+4} + 2)\, h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + \cancel{4} - \cancel{4}}{h\left(\sqrt{h+4} + 2\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

32 **Erabili deribatuaren definizioa $f'(x)$ aurkitzeko kasu hauetako bakoitzean:**

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \to f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f(x+h) = x + h + \frac{1}{x+h} \to f(x+h) - f(x) =$$

$$= \cancel{x} + h + \frac{1}{x+h} - \cancel{x} - \frac{1}{x} = h + \frac{x - x - h}{x(x+h)}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1 + \frac{-1}{x(x+h)} \to f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[1 - \frac{1}{x(x+h)}\right] = 1 - \frac{1}{x^2}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \to f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f(x+h) = \sqrt{(x+h)^2 + 1} \to f(x+h) - f(x) = \sqrt{(x+h)^2 + 1} - \sqrt{x^2+1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}}{h\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}\left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

EBAZTEKO

33 **Aztertu honako funtzio hauen deribagarritasuna:**

a) $y = |x - 2|$

b) $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$

d) $y = x^2 + |x|$

☛ ***Ikusi 3. ariketa ebatzia.***

a) Tarteka definitzen dugu funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 2 \text{ bada} \\ x - 2 & x \geq 2 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribatuz:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \text{ bada} \\ 1 & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} f'(2^-) \neq f'(2^+) \to \text{Ez da existitzen } f'(2)$$

Funtzioa $\mathbb{R} - \{2\}$ multzoan da deribagarria.

b) Tarteka definitzen dugu funtzioa, horretarako y zein puntutan egiten den zero ikusiko dugu:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & x < -4 \text{ bada} \\ -x^2 - 6x - 8 & -4 \le x \le -2 \text{ bada} \\ x^2 + 6x + 8 & x > -2 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribatuz:

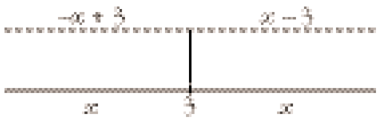
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & x < -4 \text{ bada} \\ -2x - 6 & -4 < x < -2 \text{ bada} \\ 2x + 6 & x > -2 \text{ bada} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4^-) = 2(-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2(-4) - 6 = 2 \end{array}\right\} \; f'(-4^-) \neq f'(-4^+) \;\rightarrow\; \text{Ez da existitzen } f'(-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2(-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = 2(-2) + 6 = 2 \end{array}\right\} \; f'(-2^-) \neq f'(-2^+) \;\rightarrow\; \text{Ez da existitzen } f'(-2)$$

Beraz, funtzioa $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$ multzoan da deribagarria.

c) $x - 3$-ren zeinua aztertuko dugu, funtzioa tarteka definitzeko:



$$x + (-x + 3) = 3$$

$$x + x - 3 = 2x - 3$$

Horrela:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x < 3 \text{ bada} \\ 2x - 3 & x \ge 3 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribatuz:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \text{ bada} \\ 2 & x > 3 \text{ bada} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = 2 \end{array}\right\} \; f'(3^-) \neq f'(3^+) \;\rightarrow\; \text{Ez da existitzen } f'(3)$$

Funtzioa $\mathbb{R} - \{3\}$ multzoan da deribagarria.

d) Tarteka definitzen dugu funtzioa. Horretarako, gogoratu $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \text{ bada} \\ x & x \ge 0 \text{ bada} \end{cases}$.

Horrela:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \text{ bada} \\ x^2 + x & x \ge 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribatuz:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \text{ bada} \\ 2x + 1 & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} f'(0^-) \neq f'(0^+) \rightarrow \text{ Ez da existitzen } f'(0).$$

Funtzioa $\mathbb{R} - \{0\}$ multzoan da deribagarria.

34 **Kalkulatu honako funtzio hauen deribatu nuluko puntuak:**

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

b) $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$

f) $y = \sin x + \cos x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \dfrac{1}{12}$

Deribatua zero da $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$ puntuan.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (ez du balio)} \\ x = \dfrac{8}{3} \rightarrow y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$$

$x = 0$ ez dago definizio eremuan.

Funtzio deribatua zero egiten da $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$ puntuan.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Deribatua zero da $(-1, 3)$ eta $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ puntuetan.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$y' = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -1$

Deribatua zero da $(0, -1)$ puntuan.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2+x) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = -2 \;\rightarrow\; y = 4e^{-2} \end{cases}$$

$(0, 0)$ eta $(-2, 4e^{-2})$ puntuetan egiten da zero deribatua.

f) $y' = \cos x - \sin x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \sin x \;\rightarrow\; tg\, x = 1 \;\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Puntu hauetan zero da $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$, non $k \in \mathbb{Z}$.

s35 a) Kalkulatu *m* eta *n*-ren balioa *f* funtzioa deribagarria izan dadin $\mathbb{R}$ osoan.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & x \le 1 \text{ bada} \\ -x^2 + nx & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

b) Zer puntutan da $f'(x) = 0$?

a) Deribagarria izan dadin jarraitua izan behar du.

- **$x \neq 1$ bada,** funtzio jarraitua da, polinomio biz osatua baita.
- **$x = 1$ bada:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Jarraitua izateko $x = 1$-ean:

$-4 + m = -1 + n$; edo: $m = n + 3$

Deribagarritasuna:

- **$x \neq 1$ bada,** funtzioa deribagarria da. Gainera:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x < 1 \text{ bada} \\ -2x + n & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

- **$x = 1$ bada:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$

Deribagarria izan dadin $x = 1$-ean, hauxe gertatu behar da: $-3 = -2 + n$, edo gauza bera dena: $n = -1$

Beraz, funtzioa deribagarria izan dadin $\mathbb{R}$ osoan $m = 2$ eta $n = -1$ behar ditugu. Kasu honetan, hauxe da deribatua:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x < 1 \text{ bada} \\ -2x - 1 & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5 \ , \ x < 1$

$$2x - 5 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{5}{2}; \text{ baina } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \ \rightarrow \ x = -\frac{1}{2}; \text{ baina } -\frac{1}{2} < 1$$

Beraz, ez dago puntrik non $f'(x)$ zero egingo den.

s36 **Kalkulatu a eta b-ren balioa honako funtzio hau deribagarria izan dadin $\mathbb{R}$ osoan:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \text{ bada} \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribagarria izateko, jarraitua izan behar du funtzioak.

- **$x \neq 2$ baldin bada** $\rightarrow$ Jarraitua da funtzioa, polinomioz osaturikoa baita.
- **$x = 2$-an** jarraitua izateko, hauxe bete behar du funtzioak: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Jarraitua izateko, $4a + 6 = -2b$ gertatu behar da; edo gauza bera dena, $2a + 3 = -b$, edo, $b = -2a - 3$.

Deribagarritasuna:

- **$x \neq 2$** baldin bada $\rightarrow$ Funtzioa deribagarria da. Gainera,

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & x < 2 \text{ bada} \\ 2x - b & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x = 2}$**-an** berdintza hau bete behar du funtzioak: $f'(2^-) = f'(2^+)$

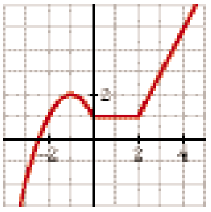
  $\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$

  Deribagarria izateko, beraz, $4a + 3 = 4 - b$ gertatu behar da, edo gauza bera dena: $b = -4a + 1$

  Lortutako baldintza biak kontuan izanik:

  $\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$

  Beraz, $f(x)$ deribagarria izan dadin $\mathbb{R}$ osoan, $a = 2$ eta $b = -7$ izan behar dira.

37 

Honako hau $y = f(x)$ funtzio baten grafikoa da. Kalkulatu eta aztertu:

$$f'(-1),\ f'(1) \text{ y } f'(3)$$

Zer puntutan ez da deribagarria?

- $x = -1$-ean, f-ri dagokion zuzen ukitzailea horizontala da; beraz, bere malda 0 da.

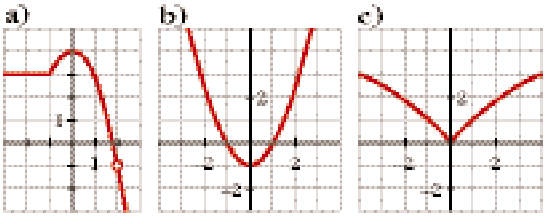
  Hortaz, $f'(-1) = 0$.

- $x = 1$-ean, f funtzioa konstantea da. Beraz, $f'(1) = 0$.
- $x = 3$-an, f funtzioa $(2, 1)$ eta $(4, 5)$ puntuetatik igarotzen den zuzena da.

  Bere malda kalkulatuko dugu: $m = \dfrac{5-1}{4-2} = 2$. Hortaz, $f'(3) = 2$.

- Funtzioa ez da deribagarria ez $x = 0$-an, ez $x = 2$-an, puntu horietan hauxe gertatzen baita: $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ eta $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

s38 Aztertu honako funtzio hauen grafikoak, eta adierazi zer puntutan ez diren deribagarriak. Horietakoren bat deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan?



a) Ez da deribagarria $x = -1$-ean $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$ (puntu "angeluduna" baita) eta ezta ere $x = 2$-an (ez dagoelako definituta funtzioa, eta beraz ez da jarraitua).

b) $\mathbb{R}$ osoan da deribagarria.

c) Ez da deribagarria $x = 0$-an $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ ("angeludun" puntua baita).

277. orrialdea

s39 **Kalkulatu *a* eta *b*-ren balioa *f* jarraitua eta deribagarria izan dadin**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \leq 0 \text{ bada} \\ ax + b & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Jarraitasuna:

- **$x \neq 0$ bada** $\to$ Funtzioa jarraitua da, polinomio biz osatuta baitago.
- **$x = 0$-an:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ Jarraitua izateko } b = 0 \text{ gertatu behar da.}$$

Deribagarritasuna:

- **$x \neq 0$ bada** $\to$ Funtzioa deribagarria da, eta gainea:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x < 0 \text{ bada} \\ a & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

- **$x = 0$-an:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{ Deribagarria izan dadin: } a = -1$$

Beraz, $f(x)$ jarraitua eta deribagarria da $a = -1$ eta $b = 0$ badira.

40 **Kalkulatu honako funtzio honen deribatuaren balioa:**

$cos\,(x + y) + sin(x - y) = 0$ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ puntuan.

Deribatuz:

$$-sin\,(x + y) \cdot (1 + y') + cos\,(x - y) \cdot (1 - y') = 0$$

$$-sin\,(x + y) - y'\,sin\,(x + y) + cos\,(x - y) - y'\,cos\,(x - y) = 0$$

$$-sin\,(x + y) + cos\,(x - y) = y'\,\big(sin\,(x + y) + cos\,(x - y)\big)$$

$$y' = \frac{-sin\,(x + y) + cos\,(x - y)}{sin\,(x + y) + cos\,(x - y)}$$

Orain deribatua kalkulatuko dugu $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ puntuan:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

s41 **Kalkulatu $f(x) = e^{2x}$ funtzioaren n ordenako deribatua.**

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}$

…

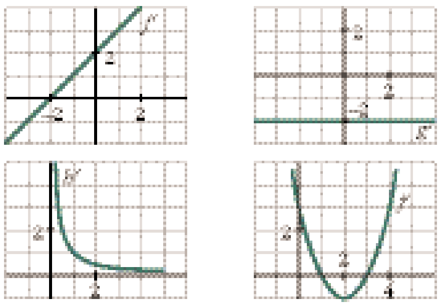
$f^n(x) = 2^n e^{2x}$

Indukzioz egingo dugu:

$n = 1$, $n = 2$ eta $n = 3$-rako ikusten dugu betetzen dela.

Demagun egiaztatzen dela $n - 1$; kasurako, hau da, $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$; orduan, deribatuz, honako hau daukagu: $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^n e^{2x}$. Beraz, lortutako adierazpenak n guztientzako balio du.

s42 **Honako grafiko hauek *f*, *g*, *h* eta *j* funtzioen deribatuak adierazten dituzte:**



a) Funtzio horietako zeinek dituzte tangente horizontaleko puntuak?

b) Grafiko horietako zein da lehen mailako funtzio polinomiko baten deribatuaren funtzioa?

c) Grafikoetako zein da bigarren mailako funtzio polinomiko batena?

a) Tangente edo ukitzaile horizontaleko puntuetan lehen deribatau zero da, dakigunez.

f funtzioak ukitzaile horizontaleko puntua dauka $x = -2$-an, $f'(-2) = 0$ baita.

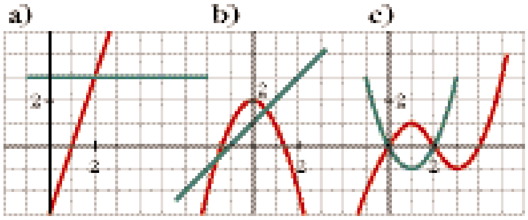
j funtzioak ukitzaile horizontaleko puntu bi ditu $x = 1$-ean eta $x = 3$-an, zeren $j'(1) = j'(3) = 0$ baitira.

g eta *h* funtzioek ez dute ukitzaile horizontaleko punturik.

b) Lehen mailako funtzio polinomiko baten deribatua funtzio konstantea denez, *g* da lehen mailako funtzio polinomikoa, g' kostantea baita.

c) Bigarren mailako funtzio polinomiko baten deribatua lehen mailako funtzio polinomikoa denez, *f* da 2. mailako funzio polinomikoa, bere deribatuaren grafikoa zuzena baita.

43 **Hurrengo ataletako zeinek adierazten du f funtzio baten eta f' bere deribatuaren grafikoa? Justifikatu erantzuna.**



a) Gorrizko funtzioa malda 3 duen zuzen bat da. Beraz, bere deribatua $y = 3$ (zuzen berdea) da. Hortaz, grafiko hauek funtzioa eta bere deribatua adierazten dituzte.

b) Gorrizko funtzioa 2. mailako polinomioa da, parabola. Bere deribatua zuzena. Funtzioak $x = 0$ puntuan maximoa du; orduan, bere deribatua puntu horretan zero izan behar da. Hau da, zuzena parabolaren deribatua izan dadin, (0, 0) puntutik igaro beharko litzateke. Eta ez denez gero horrelakorik gertatzen, grafiko honetan ageri direnak ez dira funtzioa eta deribatua.

c) Funtzioak 3. mailako polinomioa izateko antza dauka, bi mutur erlatibo baititu. Orduan, bere deribatua 2. mailako polinomioa izango litzateke: parabola. Funtzioak $x = 1$-ean maximoa du; orduan, bere deribatua zero izan beharko litzateke puntu horretan: $f'(1) = 0$. Eta horrek esan nahi du parabola (1, 0) puntutik igaro behar dela. Eta ez denez gero igarotzen, grafikoko funtzioak ez dira funtzioa eta deribatua.

Laburbilduz, lehenengoa bakarrik da baliokoa.

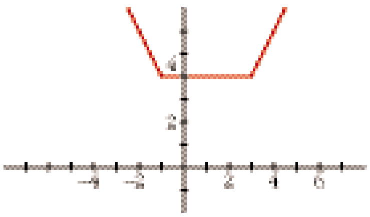
44 **a) Adierazi honako funtzio hau:**

$$f(x) = |x + 1| + |x - 3|$$

Grafikoa aztertuz, adierazi zer puntutan ez den deribagarria.

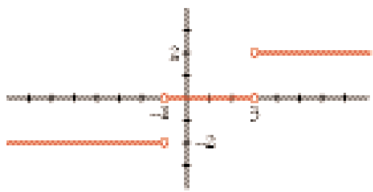
b) Adierazi $f'(x)$.

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x - 1 - x + 3 & x < -1 \text{ bada} \\ x + 1 - x + 3 & -1 \le x \le 3 \text{ bada} \\ x + 1 + x - 3 & x > 3 \text{ bada} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -2x + 2 & x < -1 \text{ bada} \\ 4 & -1 \le x \le 3 \text{ bada} \\ 2x - 2 & x > 3 \text{ bada} \end{array} \right.$



Ez da deribagarria ez $x = -1$-ean, ez $x = 3$-an. Puntu horiek "angelodunak" baitira.

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \text{ bada} \\ 0 & -1 < x < 3 \text{ bada} \\ 2 & x > 3 \text{ bada} \end{cases}$



s45 **Aurkitu honako funtzio honen deribatu nuluko puntuak:**

$$\boldsymbol{f(x) = (3x - 2x^2)\, e^x}$$

$$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; -2x^2 - x + 3 = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

46 **$\boldsymbol{f(x) = e^x + ln(1 - x)}$ funtzioa emanda, egiaztatu $\boldsymbol{f'(0) = 0}$ eta $\boldsymbol{f''(0) = 0}$ direla. $\boldsymbol{f'''(0) = 0}$ izango da?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \;\;\rightarrow\;\; f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1 - x)^2} \;\;\rightarrow\;\; f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1 - x)^3} \;\;\rightarrow\;\; f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

47 **Aztertu honako funtzio honen jarraitasuna eta deribagarritasuna:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \;\; \text{bada} \\ \dfrac{2x(x-3)}{x^2 - 9} & x \neq 0,\;\; x \neq 3 \;\; \text{bada} \\ 1 & x = 3 \;\; \text{bada} \end{cases}}$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & x = 0 \;\; \text{bada} \\ \dfrac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & x \neq 0,\;\; x \neq 3 \;\; \text{bada} \\ 1 & x = 3 \;\; \text{bada} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & x = 0 \;\; \text{bada} \\ \dfrac{2x}{x+3} & x \neq 0,\;\; x \neq 3 \;\; \text{bada} \\ 1 & x = 3 \;\; \text{bada} \end{array} \right.$$

Definizio eremua $\mathbb{R} - \{-3\}$ da. Baina, $x = -3$-ean funtzioa ez da jarraitua (ezta ere deribagarria), ez baitago definituta.

Jarraitasuna:

- **$\boldsymbol{x \neq 0}$, $\boldsymbol{x \neq 3}$ eta $\boldsymbol{x \neq -3}$ bada:** Funtzioa jarraitua, osatzen duten adar desberdinak jarraituak baitira.

- **$\boldsymbol{x = 0}$-an:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x + 3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \text{Ez da jarraitua } x = 0\text{-an, eten saihesgarria baitu puntu horretan.}$$

- **x = 3-an:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) \\ \text{Funtzioa jarraitua } x = 3\text{-an.} \end{array}$$

- **x = –3-an:** Ez da jarraitua, definitu barik baitago.

  Beraz, $f(x)$ jarraitua da hementxe: $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$

Deribagarritasuna:

- **$x \neq 0$, $x \neq 3$ eta $x \neq -3$:** deribagarria da. Gainera: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$

- **x = 0-an eta x = –3-an:** Ez da deribagarria, ez baita jarraitua.

- **x = 3-an:** Deribagarria da, zeren $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

  Beraz, $f(x)$ deribagarria $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$ multzoan. Gainera:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{baldin } x \neq 0 \text{ eta } x \neq -3$$

s48 **Zehaztu, ahal izanez gero, a parametroaren balioa f funtzioa deribagarria izan dadin bere definizio-eremu osoan:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq 1 \text{ bada} \\ a(1 - e^{1-x}) & 1 < x \text{ bada} \end{cases}$$

$f(x)$ deribagarria izan dadin, $f(x)$-k jarraitua izan behar du.

- **$x > 0$, $x \neq 1$ bada:** Funtzioa jarraitua da, funtzio jarraituz osatuta baitago.

- **x = 1-ean:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ jarraitua da } x = 0.$$

Deribagarritasuna:

- **$x > 0$, $x \neq 1$ bada:** deribagarria da, eta gainera:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & 0 < x < 1 \text{ bada} \\ ae^{1-x} & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

- **x = 1-ean:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ deribagarria izango da } x = 1\text{-ean baldin eta } a = 1 \text{ bada.}$$

Beraz, f deribagarria izan dadin bere definizio eremuan, $a = 1$ izan behar da.

s49 **Aztertu honako funtzio honen deribagarritasuna $x = 0$ puntuan:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \le 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$ betetzen denez, funtzioa jarraitua da $x = 0$-an.

Ikus dezagun deribagarria den:

- **$x \ne 0$ bada,** hauxe daukagu:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & x < 0 \text{ bada} \\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Eta alboko deribatuak ez dira existitzen $x = 0$-an. Beraz, $f(x)$ ez da deribagarria $x = 0$-an.

s50 **Aztertu honako funtzio hauen jarraitasuna eta deribagarritasuna:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) Tarteka definitzen dugu funtzioa.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & x < 0 \text{ bada} \\ \dfrac{1}{1 + x} & x \ge 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Jarraitasuna:

- **$x \ne 0$ bada**:

Jarraitua da, osatzen duten funtzioak jarraituak baitira definituta dauden tarteetan.

- **$x = 0$-an:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Beraz, jarraitua da } x = 0\text{-an.}$$

Beraz, funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

Deribagarritasuna:

- $\boldsymbol{x \neq 0}$ **bada:** funtzioa deribagarria da. Gainera:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \text{ bada} \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{x = 0}$**-an:**

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

  Beraz, ez da deribagarria $x = 0$.

Beraz, funtzioa $\mathbb{R} - \{0\}$ multzoan da deribagarria.

b) Tarteka definitzen dugu funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & x < 0 \text{ bada} \\ \dfrac{x}{x^2-1} & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Definizio-eremua $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ da. Beraz, $x = -1$-ean eta $x = 1$-ean, funtzioa ez da ez jarraitua ez deribagarria.

Jarraitasuna:

- $\boldsymbol{x \neq 0, \ x \neq -1, \ x \neq 1}$ **bada**:

  Funtzioa jarraitua da, adar desberdinak jarraituak baitira puntu horietan.

- $\boldsymbol{x = -1}$**-ean eta** $\boldsymbol{x = 1}$**-ean**:

  Funtzioa ez da jarraitua, funtzioa definitu barik baitago puntu horietan.

- $\boldsymbol{x = 0}$**-an:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \\ \text{Beraz, jarraitua da } x = 0\text{-an.} \end{array}$$

  Hortaz, funtzioa jarraitua da $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ multzoan.

Deribagarritasuna:

- $\boldsymbol{x \neq 0, \ x \neq -1, \ x \neq 1}$ **bada:** funtzioa deribagarria da. Gainera:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & x < 0 \text{ bada} \\ \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

- **$x = -1$ eta $x = 1$-ean:** funtzioa ez da deribagarria, ez baita jarraitua (definitu barik dago).
- **$x = 0$-an:** $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$. Ez da deribagarria $x = 0$-an.

Beraz, funtzioa $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ multzoan da deribagarria.

51 **Frogatu honako berdintza hau:** $D\left[arc\ tg\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$D\left[arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

52 **Honako funtzio hau izanda $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ egiaztatu horren deribatua konstante bat dela, $0 \leq x \leq \pi$ izanik.**

☛ ***Gogoratu $tg\ \dfrac{x}{2}$-ren formula.***

$$0 \leq x \leq \pi \quad \rightarrow \quad 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$y = arc\ tg \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = arc\ tg\left(tg\ \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

Beraz: $y' = \dfrac{1}{2}$

53 **$f(x) = x^2|x|$ bada, aurkitu f', f'' eta f'''.**

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \text{ bada} \\ x^3 & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribatuz:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & x < 0 \text{ bada} \\ 3x^2 & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$$

($x = 0$-an, $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$ baitaukagu).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & x < 0 \text{ bada} \\ 6x & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$$

($x = 0$-an, $f''(0^-) = f''(0^+) = f''(0) = 0$ baitaukagu).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & x < 0 \text{ bada} \\ 6 & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

($x = 0$-an f''' ez da existitzen, $f'''(0^-) = -6 \neq f'''(0^+) = 6$ baita).

54 **Aurkitu $y = \cos 2x - 2\cos x$ funtzioaren deribatu nuluko puntuak.**

$y' = -\sin 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\sin x) = -2\sin 2x + 2\sin x =$

$= -2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x = 2\sin x\,(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\sin x\,(-2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 + k \cdot \pi$

$-2\cos x + 1 = 0 \;\rightarrow\; \cos x = \dfrac{1}{2}$: $\quad x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$; non $k \in \mathbb{Z}$; $\quad x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$; non $k \in \mathbb{Z}$

278. orrialdea

GALDERA TEORIKOAK

55 **Badakigu** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Adierazpen horretatik abiatuta, justifikatu beste honen egiazkotasuna:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Izan bedi $h = x - x_0$, orduan hauxe daukagu:

- $h \to 0$, orduan $x \to x_0$.
- Gainera, $x_0 + h = x$.

Beraz: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

56 **Erlazionatu honako limite hauek bertan ageri diren funtzioen deribatuarekin:**

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ **b)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$

s57 **Hirugarren mailako funtzio polinomiko batek deribatu nuluko zenbat puntu izan ditzake?**

Gerta liteke bat ere ez edukitzea? Gerta liteke bat bakarrik edukitzea?

Hirugarren mailako funtzio polinomiko baten deribatua bigarren mailako funtzio polinomikoa da.

Beraz, deribatua zero bi puntutan, bakar batean edo, batean ere ez izatea gerta dakiguke.

Adibidez:

$$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{Bi puntutan}$$

$$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Puntu bakarrean}$$

$$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0 \;\text{ edozein } x\text{-rentzako} \;\rightarrow\; \text{Ez dago}$$

58 **Justifikatu bigarren mailako funtzio polinomiko batek beti duela tangente horizontaleko puntu bat.**

Bigarren mailako funtzio polinomiko baten deribatua lehen mailako funtzio polinomikoa da, eta zuzenak beti ebakiko du OX ardatza.

59 **Egon daitezke deribatu bera duten bi funtzio?**

Eman $f'(x) = 2x$ deribatua duten funtzioen adibideak.

Bai, egon daitezke. Adibidez, $f'(x) = 2x$ deribatua $f(x) = x^2 + k$ (non k kostantea den) egiturako funtzio guztiena da.

60 **Egiaztatu $f(x) = sin\ 2x$ funtzioaren ordena bikoitiko deribatu guztiak anulatu egiten direla koordenatuen jatorrian.**

$$f^{I}(x) = 2cos\ 2x$$

$$f^{II}(x) = -4sin\ 2x = -2^2 \cdot sin\ 2x$$

$$f^{III}(x) = -8cos\ 2x = -2^3 \cdot cos\ 2x$$

$$f^{IV}(x) = 16sin\ 2x = 2^4 \cdot sin\ 2x$$

…

Oro har, ordena bikoitiko deribatuek egitura hau dute: $f^{(n)}(x) = k \cdot sin\ 2x$, non k konstantea den.

Beraz, anulatu egiten dira $x = 0$-an, $sin\ 0 = 0$ baita. Gainera $f(0) = 0$ da, hortaz, $f(x)$-ren ordena bikoitiko deribatu guztiak anulatzen dira koordenatuen jatorrian.

61 **$y = \sqrt{x^2 - 4x}$ funtzioak, badu deribatu nuluko punturik?**

Eta $y = \sqrt{4x - x^2}$ funtzioak?

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \to \quad \textit{Definizio eremua} = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Baina $x = 2$ ez dago definizio eremuan. Hortaz, ez dauka deribatu nuluko punturik.

Bigarren funtzioren azterketa:

$$y = \sqrt{4x - x^2} \quad \to \quad \textit{Definizio eremua} = [0, 4]$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \quad \to \quad x = 2 \text{ (Hau definizio eremukoa da)}$$

Beraz, deribatua $x = 2$ puntuan anulatzen da.

62 **f eta g funtzioak deribagarriak dira $\mathbb{R}$ osoan, eta hau betetzen dute:**

$$f(0) = 5;\ f'(0) = 6;\ f'(1) = 3$$

$$g(0) = 1;\ g'(0) = 4;\ g'(5) = 2$$

Egiaztatu $f \circ g$ eta $g \circ f$ eragiketek deribatu bera dutela $x = 0$ puntuan.

Katearen erregela aplikatuz:

$$(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot g'(0) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(5) \cdot f'(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

SAKONTZEKO

63 **$y = \sin x$ emanda, aurkitu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tartean tangentea $(0, 0)$ eta $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ puntuetatik igarotzen den kordarekiko paraleloa izango den punturen bat.**

Puntu horietatik igarotzen den kordaren malda hau da: $m = \dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$

Eta guk puntu bat aurkitu behar dugu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tartean, funtzioaren deribatua puntu horretan hauxe izateko: $\dfrac{2}{\pi}$

$$\left.\begin{array}{l} y' = \cos x = \dfrac{2}{\pi} \\[2ex] x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \to \quad x = 0{,}88$$

64 **Deribatuaren definizioa erabiliz, egiaztatu honako funtzio hau:**

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

deribagarria dela $x = 1$ puntuan, eta ez, ordea, $x = -1$ puntuan.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{-h\sqrt{1-(1+h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sqrt{1-(1+h)^2}\right) = 0 = f'(1)$$

$$(1) \begin{cases} f(1+h) = (1-1-h)\sqrt{1-(1+h)^2} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \overset{(2)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left((2-h)\sqrt{\frac{2h-h^2}{h^2}}\right) = \lim_{h \to 0} (2-h)\sqrt{\frac{(2-h)}{h}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{0} \to \text{ ez da existitzen } f'(-1)$$

$$(2) \begin{cases} f(-1+h) = (1+1+h)\sqrt{1-(-1+h)^2} = (2+h)\sqrt{2h-h^2} \\ f(-1) = (1+1)\sqrt{1-(-1)^2} = 0 \end{cases}$$

s65 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & x \neq 0 \text{ bada} \\ k & x = 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Badago k-ren baliorik $f(x)$ jarraitua egiten duena $x = 0$ puntuan?

Jarraitasuna: hauxe bete behar du: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} + 2\right) = 1 + 2 = 3 \\ f(0) = k \end{array}\right\}$$

Funtzioa jarraitua da $x = 0$-an, $k = 3$ baldin bada.

66 **Kalkulatu honako funtzio hauen n-garren deribatua:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \ln(1 + x)$

a) $y' = a\,e^{ax}$; $y'' = a^2\,e^{ax}$; $y''' = a^3\,e^{ax}$; … $y^{n)} = a^n\,e^{ax}$

Indukzioz frogatuko dugu: (n = 1, 2, 3-rako betetzen da).

$y^{n-1)} = a^{n-1}\, e^{ax}$ baldin bada, deribatuz: $y^{n)} = a \cdot a^{n-1}\, e^{ax} = a^n\, e^{ax}$ lortzen dugu frogatu nahi genuenez.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2};\ \ y'' = \dfrac{2}{x^3};\ \ y''' = \dfrac{-6}{x^4};\ \dots\ \ y^{n)} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$

Idukzioz frogatuko dugu: ($n = 1, 2, 3$ balioetarako betetzen da).

$y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$ baldin bada, deribatuz hauxe lortzen dugu:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$, frogatu nehi genuenez.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x};\ \ y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2};\ \ y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3};\ \dots\ \ y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Indukzioz frogatuko dugu: ($n = 1, 2, 3$ balioetarako betetzen da).

$y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2}\,(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$ deribatuz hauxe lortzen dugu:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)(n-1)}{(1+x)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$, frogatu nahi genuenez.

67 **Funtzio hau izanda:**

$$f(x) = \begin{cases} x^n\, sin(1/x) & x \neq 0 \text{ bada} \\ 0 & x = 0 \text{ bada} \end{cases}$$

eta n zenbaki arrunt bat dela kontuan hartuta.

a) Egiaztatu f deribagarria dela $x = 0$ puntuan, $n = 2$ denean.

b) Egiaztatu f ez dela deribagarria $x = 0$ puntuan, $n = 1$ denean.

a) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2\, sin\,(1/h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h\, sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \overset{(*)}{=} 0$

(*) Kontuan izan $-1 \leq sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \leq 1$.

Beraz, f ez da deribagarria $x = 0$-an $n = 2$ denean.

b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\, sin\,(1/h) - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$

Limite honek ez du existitzen $sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$ -1 eta 1-en arteko balioak hartzen baitabil.

Beraz, f ez da deribagarri $x = 0$-an, $n = 1$ denerako.

68 **Frogatu honako kurba honetan badagoela puntu bat:**

$$f(x) = e^x + arc\ tg\ x$$

tangentea (puntu horretan) $y = 3x + 2$ zuzenarekiko paraleloa duena.

☛ ***Ezarri Bolzanoren teorema $g(x) = f'(x) - 3$ funtzioari.***

$y = 3x + 2$ zuzenaren malda $m = 3$ da.

Frogatu behar dugu badagoela kurbako puntu bat $f'(x) = 3$ betetzen duena.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} = 3$$

Har dezagun $g(x) = f'(x) - 3$; hots:

$$g(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} - 3$$

Hauxe daukagu: $\begin{cases} g(0) = -1 < 0 \\ g(1) = e - \dfrac{5}{2} \approx 0{,}22 > 0 \\ g(x) \text{ jarraitua da } [0, 1] \text{ tartean} \end{cases}$

Bolzanoren teorema aplikatuz, badago puntu bat $c \in (0, 1)$ honako hau betetzen duena: $g(c) = 0$. Hau da, $f'(c) - 3 = 0$; edo $f'(c) = 3$, frogatu nahi genuenez.

279. orrialdea

69 **Egiaztatu, kasu hauetako bakoitzean, $f(x)$ emandako ekuazioa betetzen duela:**

a) $f(x) = e^x \sin x$

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

b) $f(x) = ln \dfrac{1}{x + 1}$

$$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$$

a) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$

$f''(x) = \cancel{e^x \sin x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x \sin x} = 2e^x \cos x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0$

Beraz: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Beste era batera:

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = f(x) + e^x \cos x$

$f''(x) = f'(x) + e^x \cos x - e^x \sin x =$

$= f'(x) + e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x - e^x \sin x =$

$= f'(x) + (e^x \sin x + e^x \cos x) - 2e^x \sin x =$

$= f'(x) + f'(x) - 2f(x) = 2f'(x) - 2f(x)$

Beraz: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln\ 1 - ln\ (x + 1) = -ln(x + 1)$

$$f'(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$xf'(x) + 1 = \frac{-x}{x+1} + 1 = \frac{-x + x + 1}{x+1} = \frac{1}{x+1} = e^{ln\left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^{f(x)}$$

Beraz: $xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$

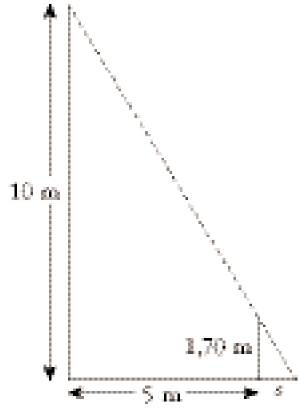
s70 **Pertsona bat 3 m/s-ko abiadura konstantean doa oinez, eta zuzen eta horizontalean urruntzen da 10 m-ko altueran dagoen argi-foku baten oinarritik.**

Pertsona horrek 1,70 m-ko altuera duela jakinda, kalkulatu:

a) Zenbatekoa den itzalaren luzera pertsona hori argiaren oinarritik 5 m-ra dagoenean.

b) Itzalaren hazkundearen abiadura oinez hasi eta *t* segundora.

a)



Izan bedi s itzalaren luzera. Triangeluen antzekotasunagatik:

$$\frac{10}{5+s} = \frac{1{,}7}{s} \rightarrow 10s = 1{,}7(5 + s) \rightarrow 10s = 8{,}5 + 1{,}7s \rightarrow$$

$$\rightarrow 8{,}3s = 8{,}5 \rightarrow s = 1{,}024 \text{ m}$$

Itzala 1,024 metrokoa da.

b) t segundotan ibilitako espazioa $3t$ da.

Ikus dezagun zelan aldatzen den itzala:

$$\frac{10}{3t+s} = \frac{1{,}7}{s} \rightarrow 10s = 5{,}1t + 1{,}7s \rightarrow 8{,}3s = 5{,}1t \rightarrow s = \frac{5{,}1t}{8{,}3}$$

Funtzio honek ematen digu itzalaren luzera ibiltzen hasi denetik igaro den denborarekiko.

Itzala zein abiaduratan hazten den, s-ren t-rekiko deribatuak emango digu:

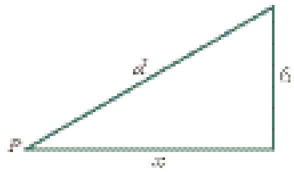
$$s' = \frac{5{,}1}{8{,}3} = 0{,}614 \text{ m/s}$$

71 **Hegazkin bat horizontalean doa 6 km-ko altueran. Hegazkinaren ibilbidea *P* puntu baten bertikaletik igarotzen da, eta badakigu, hegazkinetik *P*-ra 10 km dauden unean, distantzia hori 6 km/minutu handiagotzen dela.**

Kalkulatu hegazkinaren abiadura, konstantetzat hartuko duguna.

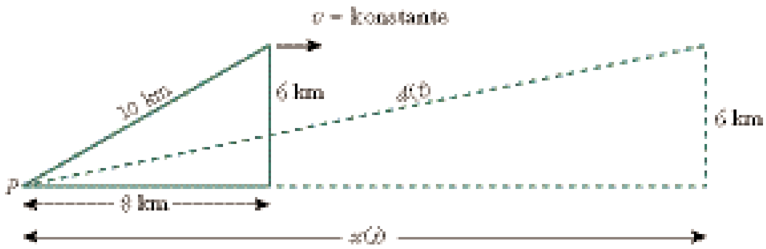
Urratsak:

a) Adierazi *d* *x*-ren funtzioan:



b) Lortu *P*-ren urruntze-abiaduraren adierazpena, $d'(t)$, x eta $x'(t)$-ren funtzioan.

c) Bakandu $x'(t_0)$, kontuan hartuta t_0 enuntziatuak aipatzen duen unea dela, eta, beraz, zenbakizko datu batzuk ezagunak dituela. $x'(t_0)$ hegazkinak une horretan daraman abiadura da, eta, beraz, bere abiadura konstantea.



a) $d = \sqrt{x^2 + 36}$

b) $d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 36}$

Abiadura $d(t)$-ren deribatuak emango digu:

$$d'(t) = \frac{2x(t)\,x'(t)}{2\sqrt{(x(t))^2 + 36}} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 36}}$$

c) $d = \sqrt{x^2 + 36}$ denez $\rightarrow$ $10 = \sqrt{x^2 + 36}$ $\rightarrow$ $x^2 = 64 \left\langle \begin{array}{l} x = 8 \\ x = -8 \ \text{(ez du balio)} \end{array} \right.$

$t = t_0$-an, $d(t_0) = 10$ km, $d'(t_0) = 6$ km/min eta $x(t_0) = 8$ km

$$x'(t_0) = \frac{d'(t_0)\sqrt{(x(t_0))^2 + 36}}{x(t_0)} = \frac{6\sqrt{8^2 + 36}}{8} = \frac{60}{8} = 7{,}5 \text{ km/min}$$

Hegazkina 7,5 km/min-ko abiaduran doa, hau da, 450 km/h-ko abiaduran.

279. orrialdea

AUTOEBALUAZIOA

1. **Aurkitu honako funtzio hauen funtzio deribatuak:**

a) $y = (2x + 2)\sqrt{x - 1}$ **b)** $y = arc\ tg \dfrac{x + 3}{x - 3}$ **c)** $y = ln(ln\ x)^2$

d) $y = \sqrt[3]{2^{x - 1}}$ **e)** $y = (tg\ x)^{1 - x}$ **f)** $x^2 + y^2 - xy = 0$

a) $y' = 2\sqrt{x-1} + (2x+2) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}} =$

$$= \frac{2(x-1) + x + 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$$

b) $$y' = \frac{D\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)}{1 + \left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^2} = \frac{\dfrac{-6}{(x-3)^2}}{\dfrac{(x-3)^2 + (x+3)^2}{(x-3)^2}} = \frac{-6}{2x^2 + 18} = \frac{-3}{x^2 + 9}$$

c) Logaritmoen propietateak aplikatu ondoren, deribatuz:

$$y = ln\ (ln\ x)^2 = 2\ ln\ (ln\ x) \ \to\ y' = 2 \cdot \frac{D(ln\ x)}{ln\ x} = 2\ \frac{1/x}{ln\ x} = \frac{2}{x\ ln\ x}$$

d) Erroa berreketa gisa adieraziz eta ondoren deribatuz:

$$y = \sqrt[3]{2^{x-1}} = 2^{\frac{x-1}{3}} \ \to\ y' = D\left(\frac{x-1}{3}\right) \cdot 2^{\frac{x-1}{3}} \cdot ln\ 2 = \frac{ln\ 2}{3} \cdot 2^{\frac{x-1}{3}}$$

e) Deribazio logaritmikoa aplikatuz:

$$ln\ y = (1-x)\ ln\ (tg\ x) \ \to\ \frac{y'}{y} = -ln\ (tg\ x) + (1-x)\ \frac{D(tg\ x)}{tg\ x} \ \to$$

$$\to\ \frac{y'}{y} = -ln\ (tg\ x) + (1-x)\ \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x} \ \to$$

$$\to\ y' = \left[-ln\ (tg\ x) + \frac{(1-x)(1 + tg^2\ x)}{tg\ x}\right] (tg\ x)^{1-x} =$$

$$= -(tg\ x)^{1-x}\ ln\ (tg\ x) + (1-x)(1 - tg^2\ x)\ (tg\ x)^{-x}$$

f) Inplizituki deribatuz:

$$x^2 + y^2 - xy = 0 \ \to\ 2x + 2yy' - y - xy' = 0 \ \to\ (2y - x)y' =$$

$$= y - 2x \ \to\ y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

2. **Erabili deribatuaren funtzioa $f'(x)$ aurkitzeko, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ izanik.**

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 \cdot x^2} = \frac{-2xh - h^2}{x^2\,(x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2xh - h^2}{x^2\,(x+h)^2 h} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

3. **$f(x) = x|x|$ funtzioa emanda, definitu ezazu tarteka eta aurkitu:**

a) $f'(x)$ **b) $f''(x)$**

Adierazi $f'(x)$ eta $f''(x)$.

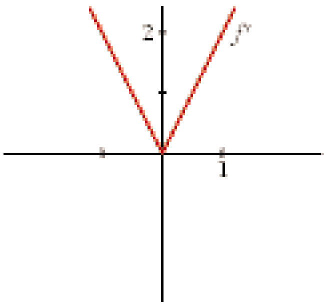
$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

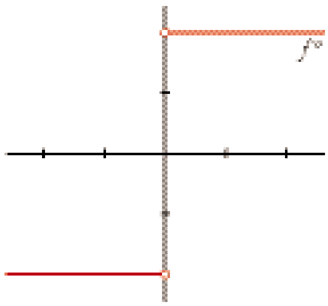
$$\text{a) } f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ denez, funtzioa deribagarria da $x = 0$-an.

$$\text{b) } f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ez da existitzen $f''(0)$, zeren $f''(0^-) = -2 \neq 2 = f''(0^+)$ baita.





4. **Aztertu honako funtzio honen deribagarritasuna $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ eta kalkulatu $f'(1)$.**

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$ jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

$f(x)$ deribagarria da $\mathbb{R} - \{0\}$ multzoan ($x = 0$-an ez dago deribaturik).

$$f'(1) = \frac{-2}{3}$$

5. **Aztertu honako funtzio honen jarraitasuna eta deribagarritasuna:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x \le 1 \text{ bada} \\ x + 1 & x > 1 \text{ bada} \end{cases}}$$

Existitzen da $f'(x) = 0$ izango den punturik? Adierazi grafiko baten bidez.

Jarraitasuna:

- **$x \neq 1$ bada:** funtzioa jarraitua da, polinomio biz osatuta baitago.
- **$x = 1$-ean:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

Beraz, funtzioa jarraitua da $x = 1$-ean.

Funtzioa, bada, jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan.

Deribagarritasuna:

- **$x \neq 1$ bada:** funtzioa deribagarria da, eta gainera:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < 1 \text{ bada} \\ 1 & x > 1 \text{ bada} \end{cases}$$

- **$x = 1$-ean:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

Funtzioa ez da deribagarria $x = 1$-ean.

Beraz, funtzioa hementxe da deribagarria: $\mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = 0$ betetzen duten puntuak:

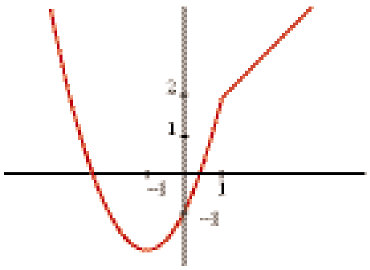
$f'(x) = 2x + 2 \quad x < 1$ bada

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ baldin eta $x > 1$ bada $\rightarrow$ $f'(x) \neq 0$ baldin eta $x > 1$ bada

Beraz, deribatua $x = -1$-ean egiten da zero.

$f(x)$-ren grafikoa:



6. **Kalkulatu a eta b-ren balioak $f(x)$ jarraitua izan dadin:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x < -1 \text{ bada} \\ ax + b & -1 \le x < 0 \text{ bada} \\ 3x^2 + 2 & 0 \le x \text{ bada} \end{cases}$$

Aztertu f-ren deribagarritasuna lortu dituzun a eta b-ren balioetarako.

- **$x \neq -1$ eta $x \neq 0$ bada:** funtzioa jarraitua da, polinomioz osatua baita.
- **$x = -1$-ean:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Jarraitua izateko, beraz, hauexe bete behar du: $-2 + a = -a + b$; edo: $b = 2a - 2$

- **$x = 0$-an:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Jarraitua izateko, $b = 2$ izan behar.

Beraz, $f(x)$ jarraitua izango da $a = 2$ eta $b = 2$ direnean.

Balio horiek ordeztuz, hauxe da $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < -1 \text{ bada} \\ 2x + 2 & -1 \le x < 0 \text{ bada} \\ 3x^2 + 2 & 0 \le x \text{ bada} \end{cases}; \text{ hau da: } f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x < 0 \text{ bada} \\ 3x^2 + 2 & x \le 0 \text{ bada} \end{cases}$$

Deribagarritasuna:

- **$x \neq 0$ bada:** deribagarria da, eta deribatua hauxe:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \text{ bada} \\ 6x & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

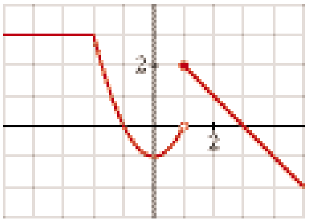
- **$x = 0$-an:**

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$

Funtzioa ez da deribagarria $x = 0$-an, alboko deribatuak desberdinak baitira.

Beraz, funtzioa $\mathbb{R} - \{0\}$ multzoan da deribagarria.

7. ***f*** **funtzio honen grafikoa kontuan hartuta, aztertu horren deribagarritasuna. Aztertu $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(3)$ existitzen diren.**



- f etena da $x = 1$-ean. Hortaz, ez da deribagarria $x = 1$-ean.

  $x = -2$-an ere ez da deribagarria, alboko deribatuak desberdinak baitira: $f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$

  Orduan, bada, f deribagarria da $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ multzoan.

- $f'(-4) = 0$ funtzioa konstantea baita puntu horretan.

  $f'(0) = 0$ $x = 0$-an ukitzailea horizontala baita.

  $f'(3) = -1$ zeren (1,2) eta (3,0) puntuetatik igarotzen den zuzenaren malda -1 baita:

  $m = \dfrac{2 - 0}{1 - 3} = -1$